# Cours de remise à niveau Maths 2ème année

# Intégrales généralisées

C. Maugis-Rabusseau
GMM Bureau 116
cathy.maugis@insa-toulouse.fr

# Plan

# Sommaire

# Introduction

On veut définir l'intégrale d'une fonction $f$, définie sauf au plus en un nombre fini de points d'un intervalle $I$, dans les cas suivants :

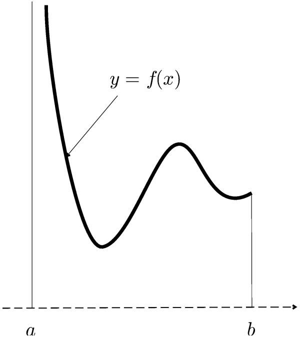
- l'intervalle d'intégration $I$ est non borné : $I = ]-\infty, +\infty[$ ou $I$ est une demi-droite,
- la fonction $f$ ne reste pas bornée lorsque $x \to a \in I$, le point $a$ pouvant être à l'intérieur de $I$ ou une extrémité de $I$.

Grâce à la relation de Chasles, on se ramène toujours à l'une des deux situations suivantes :

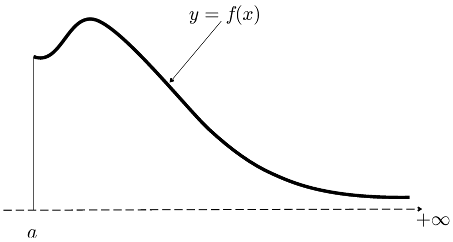
1. l'intervalle $I$ est de la forme $[a, +\infty[$ ou $I = ]-\infty, a]$, $a \in \mathbb{R}$ ;
2. l'un des cas suivants :
   - $I = ]a, b]$ et $f(x)$ ne reste pas bornée lorsque $x \to a$ ou
   - $I = [a, b[$ et $f(x)$ ne reste pas bornée lorsque $x \to b$

# Introduction

Les secondes situations de (1) et (2) se traitent exactement comme les premières. Nous allons donc examiner celles-ci, les adaptations étant immédiates pour les cas $I = ]-\infty, a]$ et $I = [a, b[$ et $f(x)$ ne reste pas bornée lorsque $x \to b$. La figure suivante donne les deux cas génériques qui ne rentrent pas dans le carde des intégrales simples.




Fonction non bornée en $a$




Intervalle d'intégration non borné

# Définition

## Définition

Soit $f$ une fonction que l'on veut intégrer sur $I = ]a, b]$, qui n'est pas bornée lorsque $x \to a$ :
Si

1. la restriction de $f$ sur tout intervalle $[x, b]$, avec $x \in ]a, b[$, est intégrable : $\forall x \in ]a, b[, f \in \mathcal{I}([x, b])$
2. $\forall x \in ]a, b], F : x \mapsto \int_x^b f(t)dt$ admet une <u>limite finie</u> $\ell$ quand $x \to a$

alors l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ est **convergente.**
La limite $\ell$ est appelée **intégrale généralisée (ou impropre)** de $f$ entre $a$ et $b$ et notée

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to a} \int_x^b f(t)dt = \lim_{x \to a} F(x).$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale est **divergente.**

# Définition

## Définition

Soit $f$ une fonction que l'on veut intégrer sur $I = [a, +\infty[$ : Si

1. la restriction de $f$ sur tout intervalle $[a, x]$, avec $x > a$, est intégrable : $\forall x > a, f \in \mathcal{I}([a, x])$
2. $\forall x > a, F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ admet une limite finie $\ell$ quand $x \to +\infty$

alors l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ est **convergente.**
La limite $\ell$ est appelée **intégrale généralisée (ou impropre)** de $f$ entre $a$ et $b$ et notée

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)dt = \lim_{x \to +\infty} F(x).$$

On dit que l'intégrale est **divergente** si $F(x)$ ne tend pas vers une limite finie lorsque $x \to +\infty$.

# Définition

## Remarque

Par commodité, on utilise souvent la notation

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ ou } \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

pour désigner une intégrale généralisée que l'on veut calculer ou étudier même si on ne sait pas a priori si elle est convergente.

## Exemple

Étudiez la nature de $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ et $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$

# Intégrales de Riemann

## Proposition

Pour tout réel $a > 0$ :

$$\int_0^a \frac{1}{x^\alpha}\, dx \text{ est convergente ssi } \alpha < 1.$$

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx \text{ est convergente ssi } \alpha > 1.$$

# Propriétés

## Proposition

Pour tout $c$ tel que $a < c < b$, l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$, avec f non bornée lorsque $x \to a$, est convergente si et seulement si $\int_a^c f(t)dt$ est convergente et

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

On a de même, pour tout $c$ tel que $c > a$, l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est convergente si et seulement si $\int_c^{+\infty} f(t)dt$ est convergente et

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^{+\infty} f(t)dt.$$

# Propriétés

## Proposition

Soit $f$ et $g$ deux fonctions vérifiant les conditions générales de la proposition précédente. Si $\int_a^b f(x)\ dx$ et $\int_a^b g(x)\ dx$ sont toutes les deux convergentes, pour tous réels $\lambda$ et $\mu$, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x) dx$ converge et on a

$$\int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x) dx = \lambda \int_a^b f(x)\ dx + \mu \int_a^b g(x)\ dx.$$

# Propriétés

## Proposition

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \neq 0$, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverge.

## Remarque

Attention, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \not\Rightarrow \displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est convergente.

Par exemple : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et pourtant

$$\int_a^x \frac{dt}{t} = \ln(x) - \ln(a) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

donc $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ diverge.

# Sommaire

# Résultats pour fonctions positives

## Théorème

1. Soit $f \geq 0$ sur $\mathcal{D}_f \bigcap ]a,b]$. L'intégrale généralisée

$$\int_a^b f(t)dt \,\mathrm{CV} \;\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R},\; \int_x^b f(t)dt \leq M,\; \forall x \in ]a,b].$$

2. Soient $f$ et $g$ t.q. $0 \leq f(x) \leq g(x),\; \forall x \in \mathcal{D}_f \bigcap \mathcal{D}_g \bigcap ]a,b]$, alors
   - si $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ converge alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ converge.
   - si $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ diverge alors $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ diverge.

# Résultats pour fonctions positives

## Théorème

1. Soient $f$ et $g$ t.q $f(x), g(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f \bigcap \mathcal{D}_g \bigcap ]a, b]$ et $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R}$. Alors

$$\ell > 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \text{ et } \int_a^b g(x)dx \text{ sont de même nature.}$$

2. En particulier, si $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ alors

$$\int_a^b f(x)dx \text{ et } \int_a^b g(x)dx \text{ sont de même nature}$$

# Résultats pour fonctions positives

## Théorème

1. Soit $f \geq 0$ sur $\mathcal{D}_f \bigcap [a, +\infty[$.

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ CV } \Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}, \int_a^x f(t)dt \leq M, \ \forall x \in [a, +\infty[.$$

2. Soient $f$ et $g$ deux fonctions vérifiant $0 \leq f(x) \leq g(x), \ \forall x \in \mathcal{D}_f \bigcap \mathcal{D}_g \bigcap [a, +\infty[$, alors
   - si $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)dx$ converge alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge.
   - si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverge alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)dx$ diverge.

# Résultats pour fonctions positives

## Théorème

1. Soient $f$ et $g$ t.q $f(x)$ et $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f \bigcap \mathcal{D}_g \bigcap [a, +\infty[$, et $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R}$. Alors

$$\ell > 0 \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ et } \int_a^{+\infty} g(x)dx \text{ sont de même nature}$$

2. En particulier, si $f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x)$ alors

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ et } \int_a^{+\infty} g(x)dx \text{ sont de même nature}$$

# Résultats pour fonctions positives

## Remarque

Il est évident que si une fonction $f$ est négative alors $-f$ est positive et les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ et $\displaystyle\int_a^b (-f)(x)dx$ seront de même nature.
Les résultats de ce paragraphe seront encore valables pour des fonctions négatives.

## Exemple

Étudiez la nature de $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln(x)}$ avec $a > e$, selon les valeurs de $\alpha$.

# Convergence absolue

**Théorème-Définition**

Si l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ est convergente alors $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est convergente.
On dit alors que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est **absolument convergente.**

Si l'intégrale généralisée $\int_a^{b} |f(x)|dx$ est convergente alors $\int_a^{b} f(x)dx$ est convergente.
On dit alors que l'intégrale $\int_a^{b} f(x)dx$ est **absolument convergente.**

**Exemple**

Étudiez la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$

# Convergence absolue

## Remarque

**Attention** : une intégrale généralisée peut être **convergente sans être absolument convergente.** On dit alors qu'elle est **semi-convergente.**

# Exemple

Considérons l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

C'est une intégrale simple au voisinage de $x = 0$ car $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
Le problème ne se pose qu'au voisinage de l'infini. Comme la convergence de l'intégrale ne dépend pas de la borne $x = 0$, on va étudier celle de

$$\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

pour ne pas introduire une difficulté qui n'en est pas.

# Exemple

On regarde d'abord si cette intégrale est absolument convergente. Comme $|\sin x| \leq 1$, on a

$$\frac{|\sin x|^2}{x} \leq \frac{|\sin x|}{x}.$$

Mais $|\sin x|^2 = \sin^2 x = (1 - \cos(2x))/2$ et donc

$$\int_{\pi}^{a} \frac{|\sin x|^2}{x} dx = \tfrac{1}{2} \int_{\pi}^{a} \frac{1}{x} dx - \tfrac{1}{2} \int_{\pi}^{a} \frac{\cos(2x)}{x} dx.$$

On calcule la $1^{\text{ère}}$ intégrale et on intègre par parties la seconde

$$\int_{\pi}^{a} \frac{|\sin x|^2}{x} dx = \tfrac{1}{2} \ln(a/\pi) - \tfrac{1}{4} \left( \frac{\sin(2a)}{a} + \int_{\pi}^{a} \frac{\sin(2x)}{x^2} dx \right).$$

# Exemple

Comme $\frac{|\sin(2x)|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$, l'intégrale $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{x^2} dx$est absolument convergente et donc

$$\lim_{a\to+\infty} \int_{\pi}^{a} \frac{\sin(2x)}{x^2} dx = \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{x^2} dx \in \mathbb{R}.$$

Il vient donc

$$\lim_{a\to+\infty} \int_{\pi}^{a} \frac{|\sin x|^2}{x} dx = +\infty - 0 - \tfrac{1}{4} \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{x^2} dx = +\infty.$$

Des critères de comparaison pour les fonctions positives, on déduit que

$$\int_{\pi}^{a} \frac{|\sin x|}{x} dx \text{ est divergente}$$

et donc $\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ n'est pas absolument convergente.

# Exemple

On regarde maintenant si $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ est convergente.

IPP :

$$\int_{\pi}^{a} \frac{\sin x}{x} dx = \left[\frac{-\cos x}{x}\right]_{x=\pi}^{x=a} - \int_{\pi}^{a} \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Comme $|\cos x| / x^2 \leq 1/x^2$, l'intégrale correspondante est absolument convergente. Il en résulte que $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ est convergente et

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = -\frac{1}{\pi} - \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Ainsi, $\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ n'est pas absolument convergente mais converge.