Cours de remise à niveau Maths 2ème année

Espaces vectoriels

C. Maugis-Rabusseau
GMM Bureau 116
cathy.maugis@insa-toulouse.fr

Plan

Sommaire

Espace vectoriel - Définition

Définition

Soit un ensemble E muni d'une loi interne "$+$" et d'une loi externe "." :

$$+ \; : \; \begin{array}{rcl} E \times E & \longrightarrow & E \\ (v_1, v_2) & \longmapsto & v_1 + v_2 \end{array} \quad \text{et} \quad . \; : \; \begin{array}{rcl} K \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, v) & \longmapsto & \lambda.v \end{array} .$$

$(E, +, .)$ est un **espace vectoriel** sur le corps K si :

1. $(E, +)$ est un groupe commutatif

   ($+$ est interne, commutative, associative, existence d'un neutre et d'un symétrique pour tout élément de E),
2. la loi externe "." est telle que $\forall (v_1, v_2) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in K^2$,
   1. $\lambda.(v_1 + v_2) = \lambda.v_1 + \lambda.v_2$,
   2. $(\lambda + \mu).v_1 = \lambda.v_1 + \mu.v_1$,
   3. $(\lambda\mu).v_1 = \lambda.(\mu.v_1)$,
   4. $1_K.v_1 = v_1$.

Les éléments de E sont appelés des **vecteurs**,
ceux de K des **scalaires.**

Exemples

1. $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel réel pour les lois $+$ et . définies par :
$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall\, (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\forall\, (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \\
\lambda.(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n).
\end{aligned}$$

2. L'ensemble $\mathbb{R}[x]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ muni des lois $+$ et . habituelles a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
3. L'ensemble $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$ des matrices à n lignes et p colonnes muni des lois $+$ et . habituelles a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
4. Soit I un ensemble et F un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathcal{F}(I, F)$ des applications de I dans F muni des lois $+$ et . habituelles a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
5. L'ensemble des suites réelles muni des lois $+$ et . habituelles a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Remarques

Remarque

Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel sur K.
Soit $(x, y) \in E^2$, soit $(\lambda, \mu) \in K^2$. Alors

$$\begin{aligned} \lambda.(x - y) &= \lambda.x - \lambda.y \\ (\lambda - \mu).x &= \lambda.x - \mu.x \end{aligned}$$

Théorème

$$\lambda.x = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0_K \text{ ou } x = 0_E.$$

Sommaire

Sous-espace vectoriel - Définition

Définition

Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel sur K.
Soit F un sous-ensemble non vide de E.
$(F, +, .)$ est un **sous-espace vectoriel** (s.e.v) de E si la restriction des lois de E à F fait de F un espace vectoriel sur K.

Théorème

Soit F un sous-ensemble de E.

$$F \text{ est un s.e.v de } E \iff \begin{cases} F \neq \emptyset \\ \forall \lambda \in K, \ \ \forall (x, y) \in F^2, \ \ \lambda x + y \in F \end{cases}$$

Remarque

1. F sous-espace vectoriel de E implique $0_E \in F$.
2. Pour montrer que $(F, +, .)$ est un espace vectoriel, il est plus facile de montrer que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel déjà connu.

Exemples

1. Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel sur K, alors E et $\{0_E\}$ sont des s.e.v de E.
2. L'ensemble $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ des applications continues de I vers $\mathbb{R}$ est un s.e.v de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.
3. Si $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathbb{R}_n[x]$ des polynômes de $\mathbb{R}[x]$ de degré inférieur ou égal à n est un s.e.v de $\mathbb{R}[x]$.
4. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = 0\}$ est un s.e.v de $\mathbb{R}^2$.
5. $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy = 0\}$ n'est pas un s.e.v de $\mathbb{R}^2$.

Intersection de s.e.v

Théorème

Soit F et G sont deux s.e.v d'un K-espace vectoriel E. Alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Vect - Définition

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in E^n$.
On dit que $x \in E$ est **combinaison linéaire** de $x_1, x_2, \cdots, x_n$ s'il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in K^n$ tel que

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i.$$

Définition

Soit A une partie de E.
On note Vect(A) le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel de E contenant A.
On dit aussi que Vect(A) est **le s.e.v engendré par** A.

Théorème

Soit A une partie de E.

1. $\text{Vect}(\emptyset) = \{0_E\}$.
2. Si $A \neq \emptyset$ alors $\text{Vect}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A :

$$\text{Vect}(A) = \left\{ x \in E \middle| \begin{array}{l} \exists(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in K^n, \\ \exists(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in A^n; \\ x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \end{array} \right\}.$$

Exemples

1. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x - y = 0\}$ un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.
   Déterminez $B \subset \mathbb{R}^3$ tel que $F = \text{Vect}(B)$.

2. Soit l'équation différentielle linéaire $(\mathcal{E})$ $y'' - 3y' + 2y = 0$.
   Si $f_1(x) = e^x$ et $f_2(x) = e^{2x}$ alors les solutions de $(\mathcal{E})$ sont
   $\text{Sol}(\mathcal{E}) = \{\lambda f_1 + \mu f_2, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.
   Trouvez A pour que Sol $(\mathcal{E}) = \text{Vect}(A)$.

Définition

On définit la **somme** de deux sous-espaces vectoriels F et G de E par

$$F+G \;=\; \left\{z\in E \,\middle|\, \exists (x,y)\;\in F\times G ; z=x+y\right\} = \mathrm{Vect}(F\cup G).$$

Exemple

Soit $F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ; x=0\}$ et $G=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ; y=0\}$.
Déterminez $F+G$.

Sommes de s.e.v

Proposition

Notons F, G et H trois sous-espaces vectoriels de E. L'opération somme de deux s.e.v a les propriétés suivantes :

1. $F + (G + H) = (F + G) + H$.
   On dit alors que la loi " $+$ " est associative.
   On note $F + G + H$ la somme des trois sous-espaces vectoriels.
2. $F + G = G + F$, la loi + est donc commutative.
3. $F + \{0_E\} = \{0_E\} + F = F$.
4. $F + F = F$ mais $F + G = F + H \not\Rightarrow G = H$.

S.e.v supplémentaires

Définition

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
La somme $F + G$ est **directe** si $F \cap G = \{0_E\}$.
On note alors $F \oplus G$.

Définition

Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont **supplémentaires dans** E si les assertions suivantes sont vérifiées

i) $E = F + G$,

ii) la somme est directe i.e. $F \cap G = \{0_E\}$.

On note alors $E = F \oplus G$.

Théorème

$E = F \oplus G \Longleftrightarrow \forall x \in E, \exists!(y, z) \in F \times G, x = y + z.$

Exemples

1. Les espaces $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = 0\}$ et $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = 0\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$?

2. Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On considère F le sous-ensemble des fonctions paires et G le sous-ensemble des fonctions impaires. Vérifiez que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E. Sont-ils supplémentaires dans E ?

S.e.v supplémentaires

Définition

Si $E_1, E_2, \cdots, E_p$ sont des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E, on dit que la somme $F = E_1 + E_2 + \cdots + E_p$ est directe si

$$\forall\, v \in F,\ \exists\,!\,(v_1, v_2, \cdots, v_p) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p;\ v = v_1 + v_2 + \cdots + v_p.$$

Dans ce cas on note $F = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_p$ ou encore $F = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} E_i$.

Proposition

Soit $E_1, E_2, \cdots, E_{p-1}, E_p$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E tels que $F = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_{p-1}$. Si F et E_p sont en somme directe alors la somme $E_1 + E_2 + \cdots + E_p$ est directe. Autrement dit,

$$\big(E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_{p-1}\big) \oplus E_p = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_p.$$

Sommaire

Famille

Définition

Soit I et E deux ensembles. On considère une application qui à tout i dans I associe un élément de E noté x_i. Cette application définit **une famille** que l'on note $(x_i)_{i\in I}$.
La famille $(x_i)_{i\in I}$ est finie si I est un ensemble de cardinal fini, elle est infinie dans le cas contraire.

Remarque

Les x_i ne sont pas nécessairement distincts. Si $I = \{1, 2, \cdots, n\}$ alors la famille $(x_i)_{i\in I}$ représente le $n-$uplet $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.
A ne pas confondre avec l'ensemble $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$.

Famille libre, famille génératrice, base

Définition

Soit $A = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ une famille non vide de E.

- A est une famille **génératrice de** E si $E = \text{Vect}(A)$.
  On dit aussi que A engendre E.
  Tout élément de E est donc une combinaison linéaire de vecteurs de A.
- La famille A est **libre** si $\forall(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in K^n$,
  $$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = 0_E \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0_K.$$
  On dit aussi que les vecteurs x_i sont **linéairement indépendants**.
- A est **liée** si elle n'est pas libre : $\exists(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in K^n$ tel que
  $$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = 0_E \text{ et } (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \neq (0_K, 0_K, \cdots, 0_K).$$
- A est une **base** de E si A est une famille libre et génératrice de E.

Exemples

1. Les familles $A = ((1,1),(1,2),(2,3))$ et $B = ((1,2,3),(1,1,1))$ sont-elles libres ?
2. Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Donnez une base des espaces vectoriels suivants :
   - $\mathbb{R}^n$,
   - $\mathcal{M}_{np}(K)$,
   - $\mathbb{R}_n[x]$
   - $\mathbb{R}[x]$

Base

Théorème

Soit E un K-espace vectoriel et $\mathcal{B} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ une famille de vecteurs de E.

$\mathcal{B}$ est une base de E
$\Longleftrightarrow \forall\, x \in E, \exists!(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in K^n ; x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n.$

Les λ_i sont les **composantes** ou **coordonnées** de x relativement à la base $\mathcal{B}$.

Proposition

Soit E un K e.v. Soit $x, y, x_1, x_2, \cdots, x_n$ des vecteurs de E.

1. (x, y) liée $\iff \exists\lambda \in K; x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$.
   Cette propriété est le plus souvent utilisée sous la forme :
   $$x \text{ et } y \text{ ni nuls ni colinéaires} \Longrightarrow (x, y) \text{ libre.}$$
   Attention : non valable pour plus de 2 vecteurs.
   Ex : $u_1 = (1, 0, 0), u_2 = (1, 1, 0)$ et $u_3 = (0, 1, 0)$ sont 2 à 2 ni nuls ni colinéaires, mais la famille (u_1, u_2, u_3) est liée.
   $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ liée $\iff$ l'un des x_i est combinaison linéaire des autres.
2. (x) est libre $\iff x \neq 0_E$.
3. $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ liée $\Longrightarrow \forall y \in E, (x_1, x_2, \cdots, x_n, y)$ est liée .
4. S'il existe i tel que $x_i = 0_E$ alors $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est liée.
5. $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ libre $\Longrightarrow \forall i \neq j, \forall\lambda \in K, x_i \neq \lambda x_j$.
6. $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ libre $\Longrightarrow$ toute sous-famille est libre.

Sommaire

Dimension d'un espace vectoriel

Définition

Un espace vectoriel est de **dimension finie** s'il existe une famille A de cardinal fini telle que $E = \mathrm{Vect}(A)$. Il est de **dimension infinie** dans le cas contraire.

Exemple

Les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[x]$, $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}[x]$ sont-ils de dimension finie ?

E.v de dimension finie - Base

Proposition

Soit E un espace vectoriel sur K de dimension finie.

1. Toute famille génératrice d'un espace vectoriel E contient plus d'éléments qu'une famille libre de E.
2. Soit $(x_1, x_2, ..., x_n)$ une famille libre de E et x dans E.
   1. Si $x \in \text{Vect}(x_1, x_2, ..., x_n)$ alors $\text{Vect}(x_1, x_2, ..., x_n, x) = \text{Vect}(x_1, x_2, ..., x_n)$.
   2. Si $x \notin \text{Vect}(x_1, x_2, ..., x_n)$ alors $(x_1, x_2, ..., x_n, x)$ est une famille libre de E.
3. Soit E non réduit au vecteur nul. De toute famille génératrice de E, on peut extraire une base de E.

Exemple

Soit $F = \text{Vect}((1, 1, 0), (0, 0, 0), (2, 2, 0), (1, 0, 1), (2, 3, -1))$.
Donnez une base de F.

E.v de dimension finie - Base

Théorème-Définition

1. Tout espace vectoriel E, non réduit à $\{0_E\}$ et de dimension finie admet une base.
2. Toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments. On appelle **dimension** de E le nombre d'éléments d'une base de E.

Exemple

Donnez la dimension de $\mathbb{R}^n$, de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$ et de $\mathbb{R}_n[x]$.

Théorème de la base incomplète

Théorème

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Soit L une famille libre de E.
Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E qui contient L.

Exemple

Complétez la base de F obtenue à l'exemple 38 afin d'obtenir une base de $\mathbb{R}^3$.

Cardinal - Base - Dimension

Proposition

Soit E un espace vectoriel de dimension n.

1. Si L est une famille libre de E alors Card $(L) \leq n$.
2. Si G est une famille génératrice de E alors Card $(G) \geq n$.
3. Si L est libre et si Card $(L) = n$ alors L est une base de E.
4. Si G est génératrice et si Card $(G) = n$ alors G est une base de E.

Exemple

Montrez que les vecteurs $(1, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ et $(1, -1, -2)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Rang

Définition

Soit $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E.
On appelle **rang** de la famille de vecteurs $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ la dimension de l'espace vectoriel engendré par ces vecteurs.

Exemple

Quel est le rang de la famille

$$((1,1,0),(0,0,0),(2,2,0),(1,0,1),(2,3,-1))?$$

Somme directe et bases

Proposition

1. Soit F et G deux s.e.v de E avec $(u_1, u_2, \cdots, u_r)$ une base de F et $(v_1, v_2, \cdots, v_s)$ une base de G. Alors
   - $F + G = \text{Vect}(u_1, u_2, \cdots, u_r, v_1, v_2, \cdots, v_s)$
   - $(u_1, u_2, \cdots, u_r, v_1, v_2, \cdots, v_s)$ libre $\Leftrightarrow F \cap G = \{0_E\}$.
2. Si $E_1, E_2, \cdots E_p$ sont p s.e.v de E t.q $\forall i \in \{1, 2, \cdots p\}$, $(u_1^i, u_2^i, \cdots, u_{r_i}^i)$ base de E_i, alors

$$E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_p \Leftrightarrow \mathcal{V} = (u_1^1, u_2^1, \cdots, u_{r_1}^1, \cdots, u_1^p, u_2^p, \cdots, u_{r_p}^p) \text{ libre.}$$

Corollaire

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1. $E = F \oplus G \Leftrightarrow (u_1, u_2, \cdots, u_r, v_1, \cdots, v_s)$ est une base de E.
2. $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i \Leftrightarrow \mathcal{V}$ est une base de E.

Formules sur les dimensions

Théorème

$E, F, E_1, E_2, \cdots, E_p$ désignent des e.v de dimension finie.

1. Si F est un s.e.v de E, alors $\dim(F) \leq \dim(E)$.
2. Si F est un s.e.v de E et si $\dim(F) = \dim(E)$ alors $E = F$.
3. $\dim(E_1 \times E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2)$.
4. $\dim(E_1 \oplus E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2)$.
   Par récurrence immédiate,
   $\dim(E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_p) = \sum_{i=1}^{p} \dim(E_i)$.
5. Si $E_1 \cap E_2 \neq \{0_E\}$ alors
   $\dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2)$.
6. $E = E_1 \bigoplus E_2 \iff \begin{cases} E_1 \cap E_2 = \{0_E\} \\ \dim(E_1) + \dim(E_2) = \dim(E) \end{cases}$