
Sollicitations Composées

NECESSITE D'UN CRITERE DE LIMITE D'ETUDE

Mise en évidence

L'essai de traction uniaxial a permis de traduire mettre en évidence la limite élastique R_e qui délimite la zone élastique. Au-delà, le matériau a un comportement plastique.

Ainsi, pour traduire la non plastification de la pièce dans le cas où la contrainte est uniquement normale, on peut écrire : $\sigma_x < R_e$

Comment peut-on prédire la détérioration d'une pièce soumise à un chargement quelconque?

En effet, nous avons vu que chaque point d'une pièce chargée subit un état de contraintes caractérisé par une matrice des contraintes.

Cet état de contraintes est très variable suivant l'endroit où on se situe sur la pièce, suivant la géométrie et suivant le chargement extérieur.

Il peut être également complexe.

- On peut observer des contraintes dans toutes les directions autour du point.
- Ces contraintes provoquent autour du point soit de l'extension ou de la compression, soit du cisaillement.

Le critère de résistance doit répondre à la difficulté de passer d'un état de contraintes quelconque (dans une pièce chargée) à l'état de contraintes de l'essai de référence dont la limite R_e est connue.

Le critère le plus utilisé pour traduire la non plastification de la pièce est le critère de Von-Mises.

Critère de Von-Mises

Deux états de contraintes présentent le même danger s'il y a égalité des énergies de variation de forme.

On démontre alors qu'il existe une contrainte équivalente qui permet de se ramener à l'essai de référence et que l'on peut alors comparer à R_e .

En RDM, la contrainte équivalente de VON-MISES s'écrit : $\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$

La connaissance de la contrainte équivalence permet alors d'écrire le critère de non plastification

Critère de non plastification :

$$\sigma_{VM} < \sigma_{adm} = \frac{R_e}{s}$$

s : coefficient de sécurité ou d'incertitude (dépend de la validité du modèle d'étude, de la qualité des matériaux, de sa mise en forme, de la sécurité des personnes et des biens mis en jeu, ...)

s=1,5 à 2 en aéronautique

s=2 à 5 pour la construction mécanique classique

s=8 à 10 pour les matériaux non homogènes, les chocs, ...

Sur un logiciel de dimensionnement (logiciel Eléments Finis), les cartes donnant la variation des composantes de contrainte ne donnent qu'une image partielle et ne permettent aucune interprétation sur les risques de dépassement de la limite élastique R_e . De plus, elles dépendent du repère dans lequel elles sont exprimées.

Seule l'image de la carte des contraintes équivalentes de Von Misès permet de visualiser clairement la(les) zone(s) soumise(s) au risque de plastification.

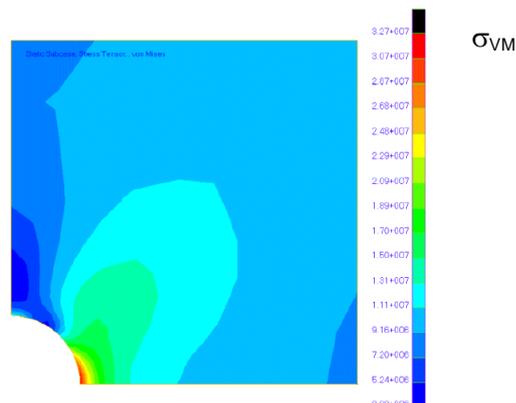


Figure : résultat d'un logiciel Eléments Finis donnant la contrainte équivalente de Von-Mises

LA FLEXION - TRACTION

Définition et hypothèses

Une poutre, ou un tronçon de poutre cylindrique, est en flexion simple dès que le torseur des efforts intérieurs se présente sous la forme suivante :

$$\{T_{int}\} = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ T_z & 0 \\ 0 & Mf_z \end{Bmatrix}_G$$

On se place ici dans le cas où l'influence de l'effort tranchant est négligeable devant les autres sollicitations

5-1 Champ de contraintes

Dans un cas général, le vecteur contrainte s'écrit

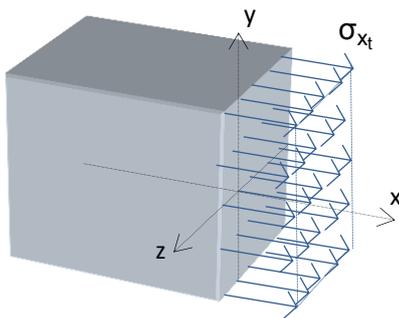
$$\vec{C}(P, \vec{x}) = \sigma_x \cdot \vec{x} + \tau_{xy} \cdot \vec{y}$$

En négligeant l'effet de l'effort tranchant, la contrainte est alors purement normale

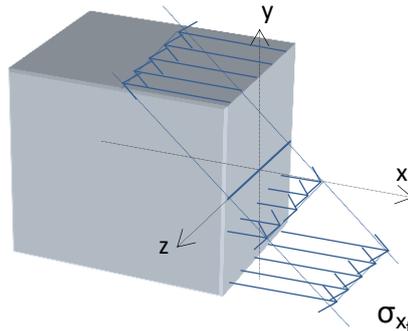
$$\vec{C}(P, \vec{x}) = \sigma_x \cdot \vec{x}$$

La valeur de la contrainte normale σ_x résulte de la somme des contraintes de traction et des contraintes de flexion.

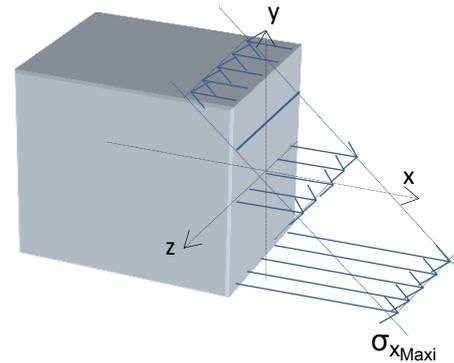
$$\sigma_x = \frac{N}{S} + \frac{-Mf_z}{I_z} \cdot y$$



Sollicitation de **traction**



Sollicitation de **flexion**



Sollicitation de **traction-flexion**

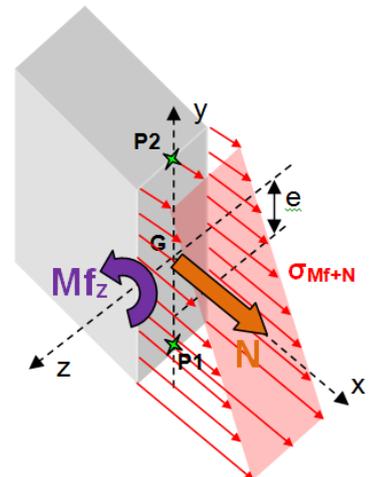
Champ de déplacements

Le champ de déplacement pour une sollicitation de traction – flexion est la superposition du champ de déplacement en traction et du champ de déplacement en flexion.

En négligeant les effets de l'effort tranchant, on obtient:

$$\frac{du}{dx} = \frac{N(x)}{E \cdot S}$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{Mf_z(x)}{E \cdot I_z}$$



EFFET DE L'EFFORT TRANCHANT

Définition et hypothèses

Une poutre, ou un tronçon de poutre, est sollicitée en flexion simple dès que le torseur des efforts intérieurs se présente sous la forme suivante :

$$\{T_{\text{coh}}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & Mf_z \end{Bmatrix}_G$$

En isolant un petit tronçon de poutre compris entre les abscisses x et $x+dx$, l'équilibre de l'élément de poutre permet de montrer que l'effort tranchant s'accompagne toujours d'un moment de flexion Mf_z avec la relation:

$$T_y = - \frac{dMf_z}{dx}$$

On montre également :

$$p = - \frac{dT_y}{dx}$$

Ces relations constituent un outil parfois utile pour vérifier la cohérence du torseur des efforts intérieurs calculés

Relation contrainte-efforts tranchant

Les relations d'équivalence permettent d'écrire :

$$\begin{cases} \vec{R}_{(x)} = \int_{(S)} \vec{C}_{(P,\vec{x})} \cdot dS = T_y \cdot \vec{y} \\ \vec{M}_{G(x)} = \int_{(S)} \vec{GP} \wedge \vec{C}_{(P,\vec{x})} \cdot dS = Mf_z \cdot \vec{z} \end{cases}$$

On déduit pour l'effet de l'effort tranchant : $\int_{(S)} \tau_{xy} \cdot dS = T_y$

Dans le cas d'une sollicitation de flexion simple, le vecteur contrainte s'écrit : $\vec{C}_{(P,\vec{u})} = \sigma_x \cdot \vec{x} + \tau_{xy} \cdot \vec{y}$

Il s'agit ici de définir la contrainte tangentielle. Il existe deux principaux modèles permettant de calculer dans le cadre d'un prédimensionnement cette contrainte tangentielle.

Modèle 1 : modèle élémentaire.

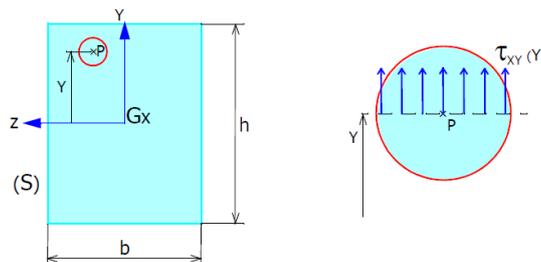
Hypothèse simplificatrice : la répartition des contraintes tangentielles est uniforme dans la section droite.

$$\tau_{xy} = \frac{T_y}{S}$$

Cette expression est souvent utilisée, car elle donne un majorant de la valeur de la contrainte tangentielle. Elle n'est cependant pas exacte car les contraintes tangentielles ne sont pas uniforme sur la section.

Modèle 1 : modèle simplifié.

Hypothèse: la répartition des contraintes tangentielles est uniforme le long d'une ligne parallèle à z (elle est fonction uniquement de la cote y)



On déduit l'expression de τ_{xy} en fonction de T_y

$$\tau_{xy} = -\frac{T_y}{b \cdot I_z} \cdot \int_{(2)} v \cdot dS$$

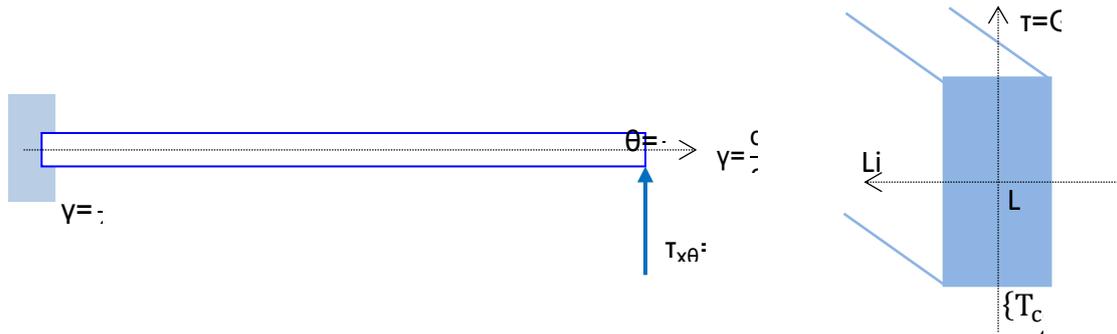
Cette expression appelée formule de Bredt permet d'avoir une meilleure approximation de la contrainte tangentielle dans la section droite. Elle fait intervenir le moment statique de la section S par rapport à l'axe z

Remarque : dans le cas de la section rectangulaire représentée ci-dessus, le calcul donne :

$$\tau_{xy} = \frac{3T_y}{2 \cdot b \cdot h} \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{2y}{h} \right)^2 \right\}$$

Ordre de grandeur des contraintes

Prenons le cas d'une poutre de section rectangulaire.



La section la plus dangereuse se situe au point O (si elle ne varie pas sur OA)

Au point O, $T_y = F$ et $M_z = F \cdot L$

Dans la section, la contrainte tangentielle est maximale sur Gz (pour $y=0$) et prend la valeur

$$\tau_{xy\text{MAXI}} = \frac{3T_y}{2 \cdot b \cdot h} \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{2y}{h} \right)^2 \right\} = \frac{3}{2} \cdot \frac{F}{b \cdot h}$$

Remarque: dans le cas de la théorie élémentaire, la contrainte tangentielle moyenne vaut:

$$\tau_{xy\text{MOY}} = \frac{F}{b \cdot h}$$

On constate que: $\tau_{xy\text{MAXI}} = \frac{3}{2} \cdot \tau_{xy\text{MOY}}$

Dans cette même section, la contrainte normale est maximale sur Pz (pour $y=h/2$) et vaut

$$\sigma_x = -\frac{M_z}{I_z} \cdot y = -6 \cdot \frac{FL}{b \cdot h^2}$$

On peut alors estimer l'ordre de grandeur du rapport des contraintes normales et tangentielles maximales dans la section 0

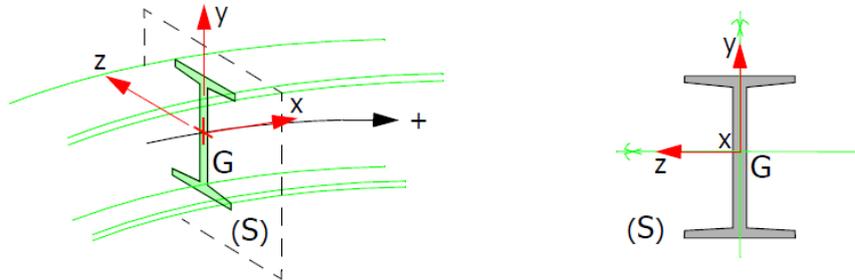
$$\frac{\tau_{xy}}{\sigma_x} \approx \frac{h}{4L}$$

LA FLEXION DEVIEE

Rappels

Pour définir les éléments de réduction du torseur des efforts intérieurs, on se place dans un système de coordonnées local (G,x,y,z) défini de la manière suivante :

- G est le centre géométrique de la section.
- \vec{x} est tangent en G à la ligne moyenne dirigé dans le sens positif,
- \vec{y} et \vec{z} sont les directions principales de la section droite (S).

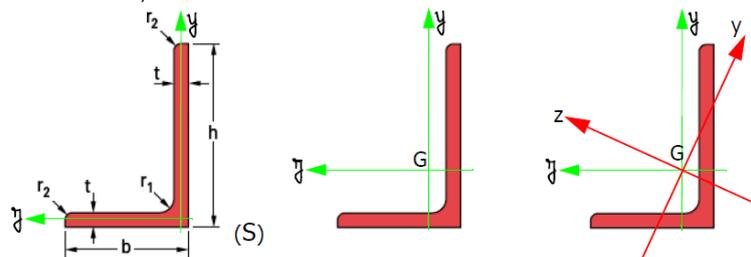


Détermination des directions principales

- quand la section possède un axe de symétrie, G est sur cet axe et l'axe de symétrie définit une direction principale.
- Sinon, on recherche les axes principaux de la section.

Exemple d'une cornière à ailes inégales:

Dans des axes arbitrairement choisis, on cherche les coordonnées de G.



On calcule ensuite dans ces axes centrés en G la matrice des moments quadratiques: Les directions (y ,z) recherchées sont les directions principales de cette matrice.

$$\begin{pmatrix} \iint_{(S)} y^2 dS & -\iint_{(S)} yz dS \\ -\iint_{(S)} yz dS & \iint_{(S)} z^2 dS \end{pmatrix} \quad dS \text{ élément surfacique.}$$

Les valeurs propres sont les moments quadratiques principaux:

Principaux résultats

Une poutre, ou un tronçon de poutre, est sollicitée en flexion déviée dès que le torseur des efforts intérieurs se présente sous la forme suivante :

$$\{T_{coh}\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T_y & Mf_y \\ T_z & Mf_z \end{pmatrix}_G$$

Le moment résultant est: $\vec{M}_G = Mf_y \cdot \vec{y} + Mf_z \cdot \vec{z}$

Les contraintes normales résultent de la superposition de deux sollicitations de flexion simple.

Pour la flexion autour de z: $\sigma_x = -\frac{Mf_z}{I_z} \cdot y$

Pour la flexion autour de y: $\sigma_x = \frac{Mf_y}{I_y} \cdot z$

$$\sigma_x = -\frac{Mf_z}{I_z} \cdot y + \frac{Mf_y}{I_y} \cdot z$$

On peut alors déduire le lieu des contraintes nulles $\sigma_x=0$ appelé axe neutre.

$$-\frac{Mf_z}{I_z} \cdot y + \frac{Mf_y}{I_y} \cdot z = 0$$

La contrainte est proportionnelle à la distance à l'axe neutre. L'équation montre que l'axe neutre n'est en général pas confondu avec la ligne d'action du vecteur moment résultant \vec{M}_G .

La ligne d'action du moment fléchissant et l'axe neutre ne coïncident donc que lorsque \vec{M}_G est dirigé suivant une direction principale de la section.

Remarque : dans le cas d'une section circulaire, tous les axes de la section passant par G sont des axes principaux de la section. On peut donc calculer le moment résultant $Mf = \sqrt{Mf_y^2 + Mf_z^2}$, le moment quadratique de la section étant égal à $I = I_y = I_z$.

On se ramène alors au cas d'une sollicitation de flexion simple autour de l'axe GZ du moment résultant avec :

$$\sigma_x = -\frac{\sqrt{Mf_y^2 + Mf_z^2}}{I_z} \cdot Y$$

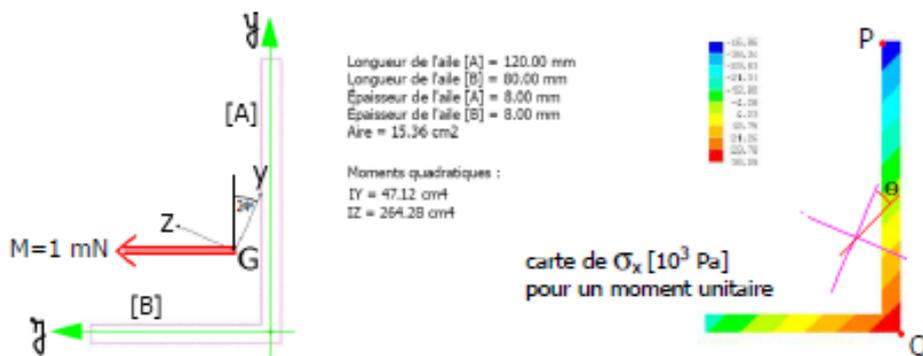
La déformation de la poutre est caractérisée par un vecteur dont les composantes sont :

$$\frac{d\theta_z}{dx} = \frac{Mf_z}{E \cdot I_{Gz}} \quad \text{et} \quad \frac{d\theta_y}{dx} = \frac{-Mf_y}{E \cdot I_{Gz}}$$

Les vecteurs \vec{M}_G et $\vec{d\theta}$ n'ont pas, comme dans la flexion pure la même direction ; cette remarque justifie le nom de flexion déviée.

Exemple de la cornière

Soit par exemple une cornière à ailes inégales soumise à un moment M unitaire (voir figure):



Pour M unitaire, les composantes M_y et M_z se calculent dans les axes principaux:

$$M_y = -\sin(24) \cdot 1 = -0.406 \quad \text{et} \quad M_z = \cos(24) \cdot 1 = 0.914$$

Pour M unitaire, la contrainte s'écrit:

$$\sigma_x = -\frac{Mf_z}{I_z} \cdot y + \frac{Mf_y}{I_y} \cdot z = -(0.346 \cdot y + 0.862 \cdot z) \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

Les valeurs extrêmes sont atteintes en P et en Q (voir figure).

Les isovaleurs sont inclinées de θ par rapport à \vec{y} : $\tan \theta = \frac{0,346}{0,862} = 0,401$ d'où $\theta = 21,8^\circ$

LA FLEXION TORSION

Principaux résultats

Une poutre, ou un tronçon de poutre, est sollicitée en flexion-torsion dès que le torseur des efforts intérieurs se présente sous la forme suivante :

$$\{T_{coh}\} = \begin{Bmatrix} 0 & M_x \\ T_y & Mf_y \\ T_z & Mf_z \end{Bmatrix}_G$$

Nous nous plaçons dans le cas de section circulaire.

Dans ce cas, tous les axes passant par le centre géométrique de la section droite sont des axes principaux. Ainsi, dans chaque section, on peut définir un moment de flexion Mf résultant:

$$Mf = \sqrt{Mf_y^2 + Mf_z^2}$$

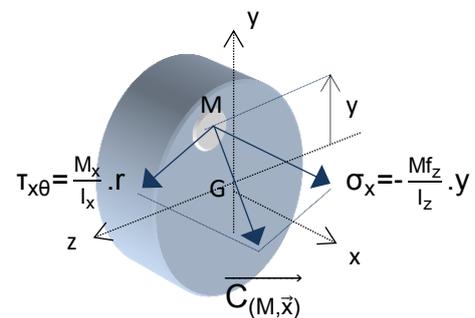
Pour les sections circulaires, les contraintes tangentielles dues aux efforts tranchants peuvent être négligées par rapport aux contraintes tangentielles dues au moment de torsion.

Le vecteur contrainte s'écrit:

$$\vec{C}(M, \vec{x}) = \sigma_x \cdot \vec{x} + \tau_{x\theta} \cdot \vec{e}_\theta$$

Avec $\sigma_x = -\frac{Mf_z}{I_z} \cdot y$ et $\tau_{x\theta} = \frac{M_x}{I_x} \cdot r$

Remarque : on suppose ici que le moment fléchissant résultant est autour de Gz .



L'état de contrainte au point M est caractérisé par la matrice

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{x\theta} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{x\theta} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Une diagonalisation de la matrice permet de calculer:

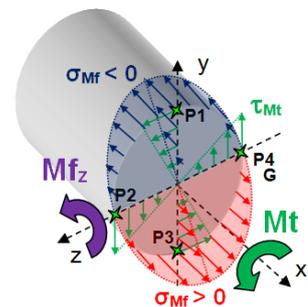
Les contraintes principales:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \sigma_{x\maxi} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_{x\maxi}^2 + 4 \cdot \tau_{x\theta\maxi}^2} \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \frac{1}{2} \sigma_{x\maxi} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_{x\maxi}^2 + 4 \cdot \tau_{x\theta\maxi}^2}$$

La contrainte normale maximale : $\sigma_{\maxi} = \frac{1}{2} \sigma_{x\maxi} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_{x\maxi}^2 + 4 \cdot \tau_{x\theta\maxi}^2}$

La contrainte tangentielle maximale : $\tau_{\maxi} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_{x\maxi}^2 + 4 \cdot \tau_{x\theta\maxi}^2}$

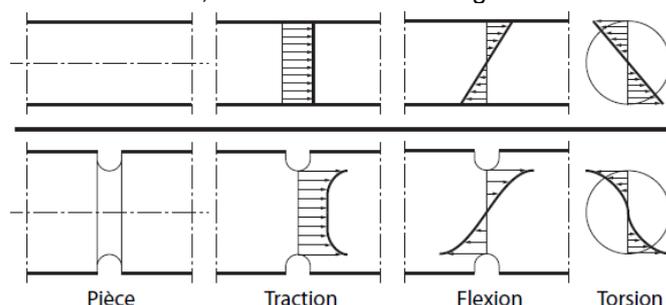
La contrainte équivalente de Von-Mises : $\sigma_{eqVM} = \sqrt{\sigma_{x\maxi}^2 + 3 \cdot \tau_{x\theta\maxi}^2}$



Notion de concentrations de contraintes

La concentration de contraintes est un problème souvent rencontré en conception mécanique. C'est un phénomène d'augmentation locale des contraintes dans une zone comportant une modification géométrique de la pièce.

Sur la figure ci-dessous, on présente pour deux géométries d'un barreau cylindrique l'allure de répartition des contraintes normales en traction et en flexion, et des contraintes tangentielles en torsion :



La zone de concentration de contraintes est souvent le site d'amorçage de fissures de fatigue et peut être aussi l'origine d'une rupture brutale dans le cas d'un matériau fragile. Dans le cas des poutres, le calcul de RdM ne donne plus des résultats corrects dans la zone où les contraintes sont concentrées. Mais les calculs restent valables tant que l'on s'éloigne "suffisamment" de l'accident géométrique (trou, variation brutale de la section, entaille. . .).

La définition du coefficient de concentration de contraintes repose sur une constatation fondamentale. Pour un type de chargement donné, le rapport entre la contrainte réelle (dans le cas où elle est inférieure à la limite d'élasticité) et la contrainte nominale en un point ne dépend pas de la valeur de la charge appliquée.

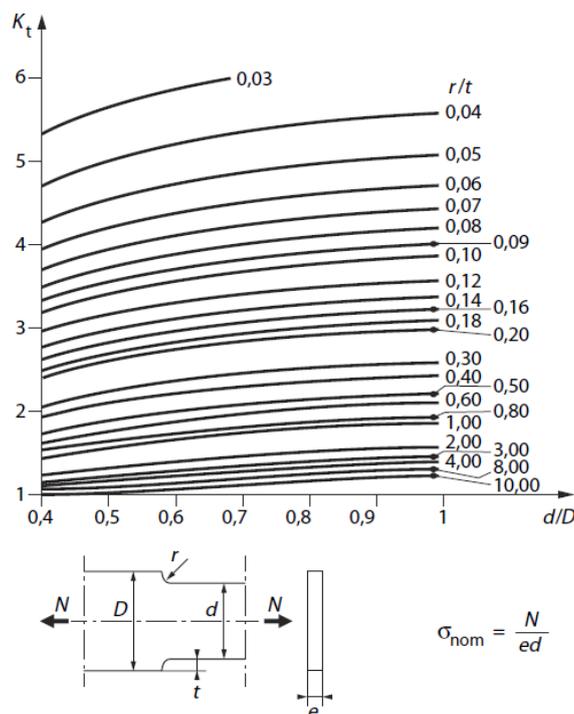
On appelle contrainte nominale la contrainte maximale calculée à partir d'une étude de RdM,

Le coefficient de concentrations de contraintes K_t est alors défini par le rapport entre la contrainte réelle et la contrainte nominale :

$$K_t = \frac{\sigma_{réel}}{\sigma_{nom}}$$

L'indice "t" est employé pour indiquer que ces coefficients sont théoriques et que leur calcul repose sur les hypothèses de la théorie de la mécanique des milieux continus. Le coefficient théorique de concentration de contraintes K_t dépend uniquement de la géométrie de la pièce (et en particulier de l'accident géométrique) et du type de sollicitation. Dans ce cas, on suppose que le matériau est élastique, linéaire, homogène et isotrope. Plusieurs approches existent pour déterminer K_t : utilisation d'abaques, de formules (souvent approchées) donnant l'expression de K_t sous forme analytique, ou encore utilisation de logiciels dédiés.

L'exemple ci-dessous illustre l'importance de la géométrie sur les valeurs du coefficient de concentration de contraintes.



On peut noter également que le coefficient de concentration de contraintes est donné pour chaque sollicitation. Ainsi, pour une sollicitation de flexion torsion, la contrainte équivalente de Von-Mises proche d'une zone de singularité s'écrit:

$$\sigma_{eqVM} = \sqrt{(K_{t_{flexion}} \cdot \sigma_{x_{maxi}})^2 + 3 \cdot (K_{t_{torsion}} \cdot T_{x\theta_{maxi}})^2}$$

La contrainte normale due à la flexion a été multipliée par le coefficient de contraintes en flexion $K_{t_{flexion}}$. La contrainte tangentielle due à la torsion a été multipliée par le coefficient de contraintes en torsion $K_{t_{torsion}}$.