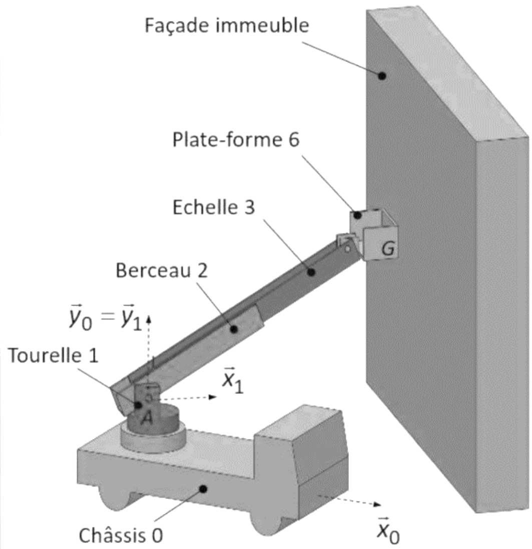
Examen de statique et cinématique – janvier 2022 – Durée : 2h
Calculatrice autorisée. Documents personnels interdits

E.P.A.S

Remarques générales :

- Portez une attention particulière à l'homogénéité des résultats (unités des expressions cohérentes).
- Un résultat non homogène sera considéré comme faux.
- Si vous vous rendez compte que le résultat est non homogène mais que vous n'avez pas le temps de revoir vos calculs, expliquez clairement en quoi il n'est pas homogène et ce qu'il manquerait pour le rendre homogène.

PRESENTATION

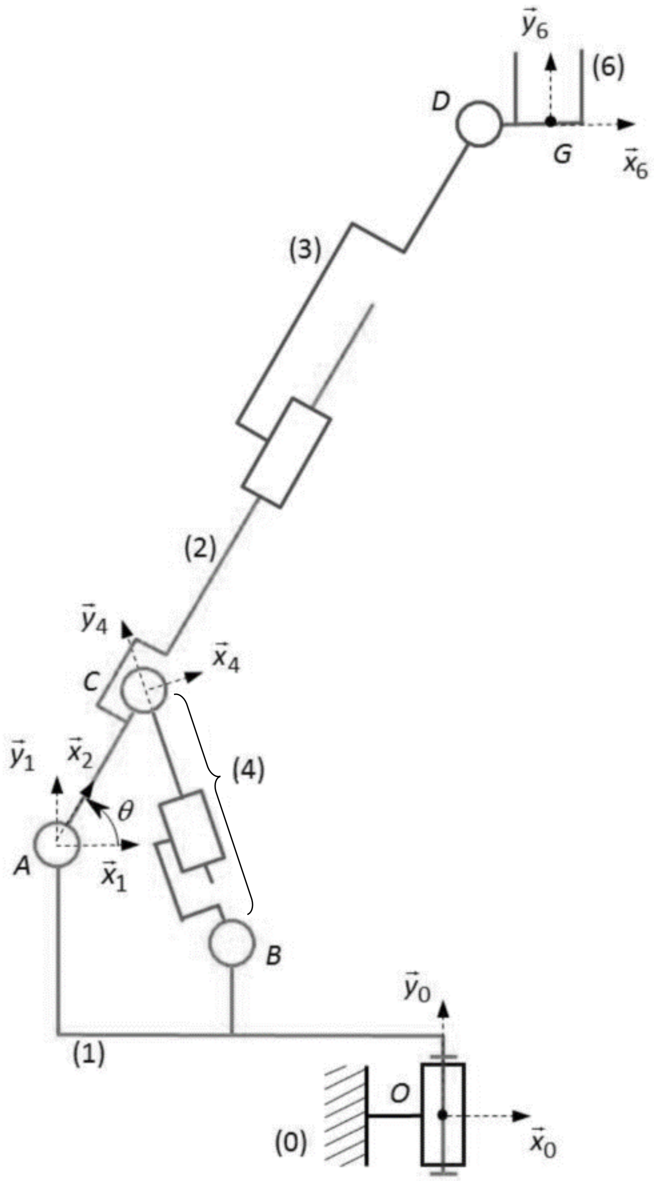


Une E.P.A.S. est une Echelle Pivotante Automatique à commande Séquentielle.

Ce système est monté sur le châssis d'un camion de pompiers et permet de déplacer une plate-forme pouvant recevoir deux personnes et un brancard le plus rapidement possible et en toute sécurité.

De façon simplifiée, on considère que ce mécanisme est constitué de cinq solides, listés ci-dessous avec leur repère associé :

- Châssis 0, associé au repère $\mathcal{R}_0 = (O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$;
- Tourelle 1, associé au repère $\mathcal{R}_1 = (A, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$;
- Berceau 2, associé au repère $\mathcal{R}_2 = (A, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$;
- Échelle 3, associé au repère $\mathcal{R}_3 = (A, \overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$;
- Vérin de dressage 4, associé au repère $\mathcal{R}_4 = (B, \overrightarrow{x_4}, \overrightarrow{y_4}, \overrightarrow{z_4})$;
- Plate-forme 6, associé au repère $\mathcal{R}_6 = (G, \overrightarrow{x_6}, \overrightarrow{y_6}, \overrightarrow{z_6})$.



Le mécanisme est représenté sous forme de schéma cinématique ci-contre.

Les liaisons entre les solides sont :

- 0/1 : pivot $(O, \overrightarrow{y_0})$
- 1/2 : pivot $(A, \overrightarrow{z_1})$
- 1/4 : pivot $(B, \overrightarrow{z_1})$
- 4/2 : pivot $(C, \overrightarrow{z_4})$
- 2/3 : glissière $(D, \overrightarrow{x_2})$
- 3/6 : pivot $(D, \overrightarrow{z_3})$

Géométrie

On donne les paramètres de position :

- $\phi = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1})$
- $\theta = (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2})$
- $\beta = (\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_6})$
- $\alpha = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_4})$
- $\overrightarrow{CD} = \lambda \overrightarrow{x_2}$

Et les paramètres caractéristiques :

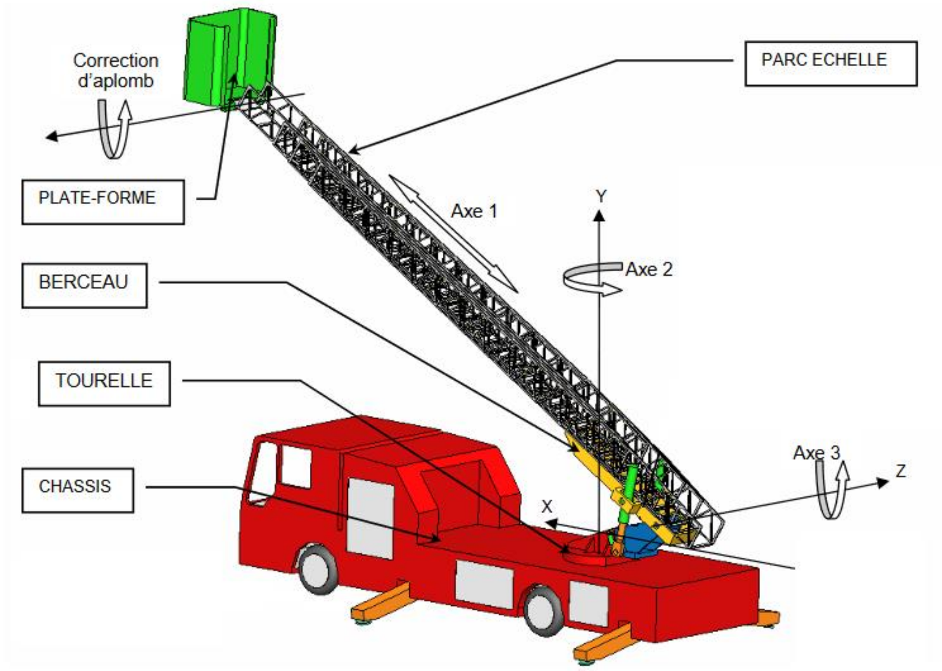
$\overrightarrow{OA} = -a\overrightarrow{x_1} + b\overrightarrow{y_1}$	$\overrightarrow{AC} = c\overrightarrow{x_2}$	c = 2 m
$\overrightarrow{AB} = c\overrightarrow{x_1} - f\overrightarrow{y_1}$	$\overrightarrow{DG} = e\overrightarrow{x_6}$	e = 1 m

La portée est définie par $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{x_1}$ (projection de $\overrightarrow{AG}$ sur $\overrightarrow{x_1}$) ; La portée maximale est de 20 m.

PARTIE 1 : CINEMATIQUE

Pour des raisons de confort et de sécurité, il est nécessaire que pendant la phase de dressage de l'échelle, la norme de l'accélération subie par une personne située dans la nacelle ne dépasse un niveau défini dans le Cahier des charges.

Objectif : Déterminer, dans le but de valider le critère du Cahier des Charges Fonctionnel, le vecteur accélération du point D appartenant à l'échelle dans son mouvement par rapport au sol.

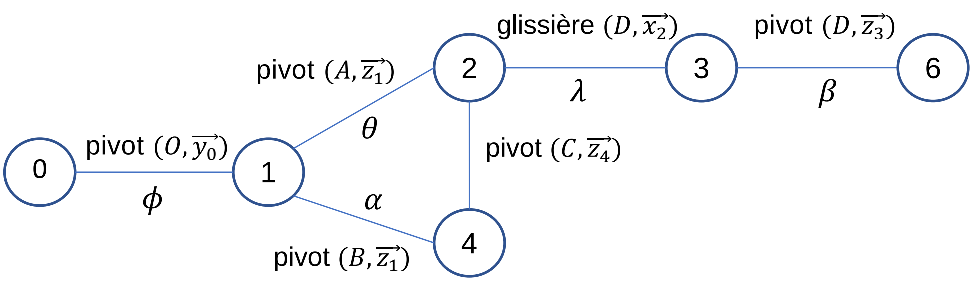


On considère deux mouvements possibles :

- Un mouvement de déploiement où l'axe 2 est immobile et seuls l'axe 1 et l'axe 3 sont mobiles : l'angle ϕ est constant alors que l'angle θ et la longueur CD (λ) sont variables (β varie de façon à ce que la plateforme soit toujours horizontale)
- Un mouvement d'approche de la façade où l'axe 1 est immobile et l'axe 2 et l'axe 3 sont mobiles mais l'axe 1 est immobile : la longueur CD (λ) est constante et les angles ϕ et θ sont variables (β varie encore de façon à ce que la plateforme soit toujours horizontale)

On cherche à déterminer la vitesse du point D durant ces deux phases

Q1. Réaliser le graphe des liaisons du mécanisme et écrire les paramètres cinématiques à côté de chaque liaison sur le graphique



*Q2. Durant la phase d'approche (**ϕ et θ variables, λ constant**) :*

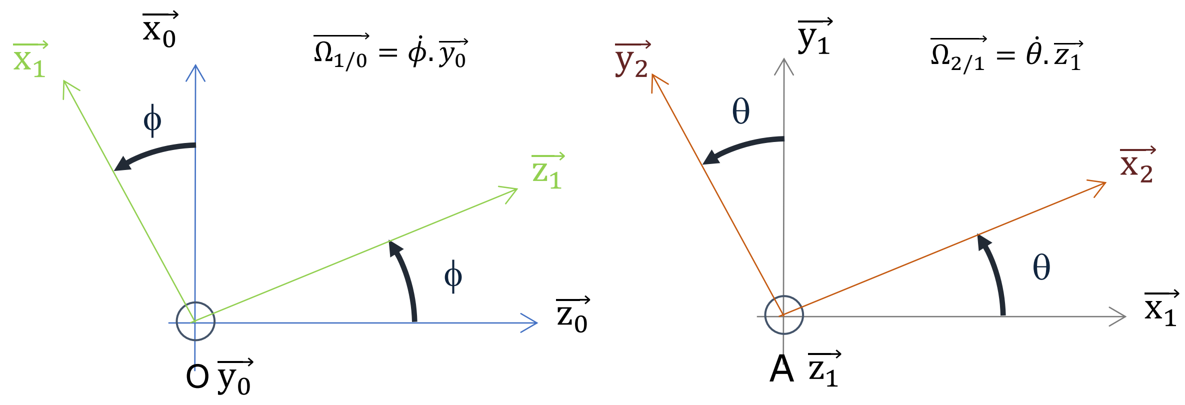
a. Donner la nature du mouvement de 1/0, celle de 2/1 et celle de 3/1.

b. Dessiner les figures de changement de base correspondant au mouvement de 1/0 et 2/1.

c. Déterminer les vecteurs vitesse de rotation $\overrightarrow{\Omega_{3/2}}$, $\overrightarrow{\Omega_{2/1}}$, $\overrightarrow{\Omega_{1/0}}$, $\overrightarrow{\Omega_{2/0}}$, $\overrightarrow{\Omega_{3/0}}$

d. Déterminer le vecteur vitesse $\vec{V}_{D\in 3/0}$ en utilisant la méthode de votre choix.

1/0 est un mouvement de rotation d'axe $(O, \overrightarrow{y_0})$
2/1 est un mouvement de rotation d'axe $(A, \overrightarrow{z_1})$
3/2 est un mouvement de translation suivant $(\overrightarrow{x_2})$ - λ étant constant, 3 et 2 sont liés



$\overrightarrow{\Omega_{3/2}} = \vec{0}$; $\overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \dot{\theta}.\overrightarrow{z_1} + \dot{\phi}.\overrightarrow{y_0}$; $\overrightarrow{\Omega_{3/0}} = \dot{\theta}.\overrightarrow{z_1} + \dot{\phi}.\overrightarrow{y_0}$

$$\vec{V}_{D\in 3/0} = \frac{d(\overrightarrow{OD})}{dt} = \frac{d(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD})}{dt} = \frac{d}{dt}(-a\overrightarrow{x_1} + b\overrightarrow{y_1} + c.\overrightarrow{x_2} + \lambda.\overrightarrow{x_2})$$

$$\vec{V}_{D\in 3/0} = -a.\frac{d(\overrightarrow{x_1})}{dt} + b.\frac{d(\overrightarrow{y_1})}{dt} + (c+\lambda).\frac{d(\overrightarrow{x_2})}{dt}$$

Car λ est constant.

$$\frac{d(\overrightarrow{x_1})}{dt} = \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{x_1} = \dot{\phi}.\overrightarrow{y_0} \wedge \overrightarrow{x_1} = -\dot{\phi}.\overrightarrow{z_1}$$

$$\frac{d(\overrightarrow{y_1})}{dt} = \vec{0}$$

$$\frac{d(\overrightarrow{x_2})}{dt} = \overrightarrow{\Omega_{2/0}} \wedge \overrightarrow{x_2} = (\dot{\theta}.\overrightarrow{z_1} + \dot{\phi}.\overrightarrow{y_0}) \wedge \overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_1 \wedge \begin{pmatrix} cos\theta \\ sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} -\dot{\theta}.sin\theta \\ \dot{\theta}.cos\theta \\ -\dot{\phi}.cos\theta \end{pmatrix}_1$$

Plus directement :

$$\frac{d(\overrightarrow{x_2})}{dt} = \overrightarrow{\Omega_{2/0}} \wedge \overrightarrow{x_2} = \left(\dot{\theta}.\overrightarrow{z_1} + \dot{\phi}.\overrightarrow{y_0}\right) \wedge \overrightarrow{x_2} = \dot{\theta}.\overrightarrow{y_2} - \dot{\phi}.\cos(\theta).\overrightarrow{z_1}$$

On déduit :

$$\vec{V}_{D\in 3/0} = \{a - (c+\lambda).\cos(\theta)\}.\dot{\phi}.\overrightarrow{z_1} + (c+\lambda).\dot{\theta}.\overrightarrow{y_2}$$

*Q3. Pour la phase de déploiement (**λ et θ variables, ϕ constant**) :*

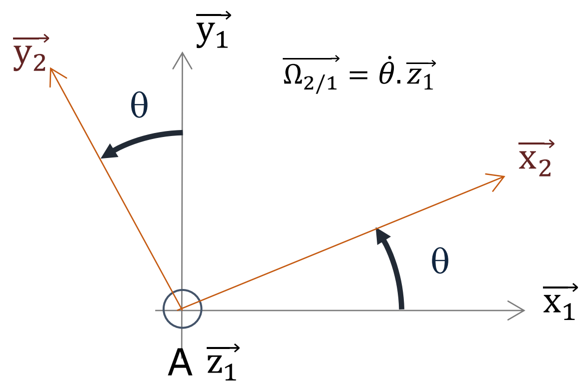
a. Donner la nature du mouvement de 2/1, celle de 2/0 et celle de 3/2.

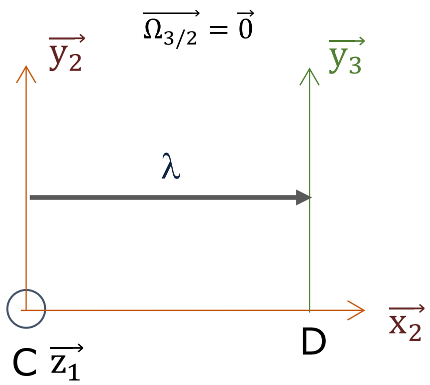
b. Dessiner les figures de changement de base correspondant au mouvement de 2/1 et de 3/2.

c. Déterminer les vecteurs vitesse de rotation, $\overrightarrow{\Omega_{3/2}}$, $\overrightarrow{\Omega_{2/1}}$, $\overrightarrow{\Omega_{2/0}}$, $\overrightarrow{\Omega_{3/0}}$

d. Déterminer le vecteur vitesse $\vec{V}_{D\in 3/0}$ en utilisant la méthode de votre choix.

2/1 est un mouvement de rotation d'axe $(A,\overrightarrow{z_1})$
2/0 est un mouvement de rotation d'axe $(A,\overrightarrow{z_1})$ car ϕ est constant
3/2 est un mouvement de translation suivant $(\overrightarrow{x_2})$





$\overrightarrow{\Omega_{3/2}} = \vec{0}$; $\overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \dot{\theta}.\overrightarrow{z_1}$; $\overrightarrow{\Omega_{3/0}} = \dot{\theta}.\overrightarrow{z_1}$

$$\vec{V}_{D\in 3/0} = \frac{d\left(\overrightarrow{OD}\right)}{dt} = \frac{d\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}\right)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-a\overrightarrow{x_1}+b\overrightarrow{y_1}+c.\overrightarrow{x_2}+\lambda.\overrightarrow{x_2}\right)$$

$$\vec{V}_{D\in 3/0} = (c+\lambda).\frac{d\left(\overrightarrow{x_2}\right)}{dt} + \dot{\lambda}.\overrightarrow{x_2}$$

Car les vecteurs de base $\overrightarrow{x_1}$ et $\overrightarrow{y_1}$ sont fixe /0

$$\frac{d\left(\overrightarrow{x_2}\right)}{dt} = \overrightarrow{\Omega_{2/0}} \wedge \overrightarrow{x_2} = \left(\dot{\theta}.\overrightarrow{z_1}\right) \wedge \overrightarrow{x_2} = \dot{\theta}.\overrightarrow{y_2}$$

On déduit :

$$\vec{V}_{D\in 3/0} = (c+\lambda).\dot{\theta}.\overrightarrow{y_2} + \dot{\lambda}.\overrightarrow{x_2}$$

Q4. Pour la phase de votre choix : déterminer l'accélération du point D $\vec{a}_{D\in 3/0}$

Pour la phase (2),

$$\vec{a}_{D\in 3/0} = \frac{d\vec{V}_{D\in 3/0}}{dt} = (c+\lambda).\ddot{\theta}.\overrightarrow{y_2} + \dot{\lambda}.\dot{\theta}.\overrightarrow{y_2} + (c+\lambda).\dot{\theta}.\frac{d\left(\overrightarrow{y_2}\right)}{dt} + \ddot{\lambda}.\overrightarrow{x_2} + \dot{\lambda}.\frac{d\left(\overrightarrow{x_2}\right)}{dt}$$

On déduit :

$$\vec{a}_{D\in 3/0} = (c+\lambda).\ddot{\theta}.\overrightarrow{y_2} - (c+\lambda).\dot{\theta}^2.\overrightarrow{x_2} + \ddot{\lambda}.\overrightarrow{x_2} + 2.\dot{\lambda}.\dot{\theta}.\overrightarrow{y_2}$$

On retrouve bien les accélérations du mouvement de rotation de 2/1, du mouvement de translation de 3/2 et de Coriolis.

Q5. **BONUS :** Expliquer pourquoi le fait de déterminer la vitesse du point D **de 6/1** revient à déterminer la vitesse d'un passager de la plateforme **dans son mouvement par rapport à 1** (on analysera la nature du mouvement de 6/1).

Les vecteurs de base $\overrightarrow{x_6}$ et $\overrightarrow{y_6}$ liés à la plateforme sont toujours parallèles à $\overrightarrow{x_1}$ et $\overrightarrow{y_1}$. Ainsi, on peut déduire que la plateforme (6) a un mouvement de translation par rapport à (1) ($\overrightarrow{\Omega_{6/1}} = \vec{O}$)

Ainsi connaissant un vecteur vitesse, $\vec{V}_{D\in 6/1} = \vec{V}_{D\in 3/1}$, on connait tous les vecteurs vitesses des différents points liés à (6)

PARTIE 2 : STATIQUE

Remarques :

- les questions **Q6, Q7, Q8, et Q9/Q10** représentent 4 parties indépendantes. Si vous bloquez, passez à la suivante !
- Chaque question demande nombre réduit d'isolements (parfois même un seul), ne cherchez pas plus compliqué que nécessaire…

Phase de dressage sans vent, 0° ≤ θ ≤ 80° et 0° ≤ α ≤ 40°.

Actions mécaniques

Le mécanisme comprend 4 actionneurs :

- un moteur délivrant un couple entre 0 et 1 : $C_{01}\overrightarrow{z_1}$ au niveau de la liaison ;
- un vérin 4 délivrant une force entre 1 et 2 : $F_{12}\overrightarrow{y_4}$ au point C ;
- un vérin délivrant une force entre 2 et 3 : $F_{23}\overrightarrow{x_2}$ au point D ;
- un moteur délivrant un couple entre 3 et 6 : $C_{36}\overrightarrow{z_1}$ au niveau de la liaison.

Hypothèses concernant les efforts :

- On néglige les poids des solides 1, 2, 3 et 4
- On tient compte uniquement du poids de la plateforme 6
- On prend une échelle de charge maximale M = 300 kg au point G

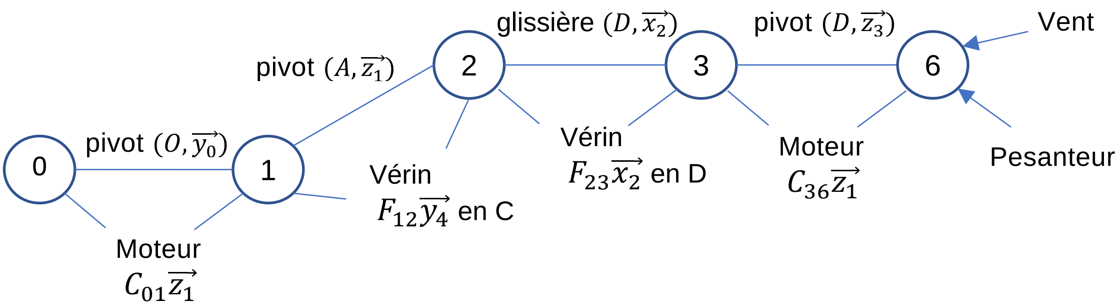
Pour les questions **<u>Q7 et Q8</u>** toutes les forces se situent dans le plan $(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0})$ et aucun vent n'agit sur le véhicule. **<u>Hypothèse : Le problème est alors considéré comme plan.</u>**

Quels que soient les mouvements, le mécanisme impose à la plate-forme 6 de rester horizontale $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_6}) = 0$

Q6. Réaliser le graphe d'analyse de ce mécanisme :

a. Faire un graphe des liaisons entre les solides

b. Positionner sur le schéma les résultantes et les couples des actions extérieures autres que celles transmissibles par les liaisons



Q7. Déterminer l'expression du couple C_{36} permettant de maintenir la plateforme 6 immobile par rapport à l'échelle 3.

a. Justifier le choix de l'isolement : solide {6}

b. Faire le bilan des actions mécaniques extérieures exercées sur le solide

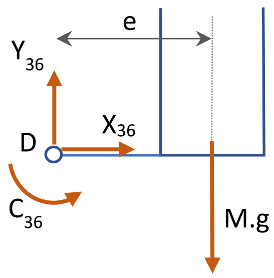
c. Justifier le point choisi pour l'expression des moments

d. Poser la ou les équation(s) du PFS nécessaire(s) pour déterminer C_{36}

<u>Note :</u> Toutes les équations ne sont pas forcément nécessaires, ne perdez pas de temps à poser et calculer ce qui n'est pas utile à la détermination de C_{36}

Le couple moteur agissant sur la liberté de la liaison pivot d'axe $(D,\overrightarrow{z_3})$, l'isolement de (6) permet d'obtenir directement C_{36} en fonction de la pesanteur

Bilan des actions mécaniques extérieures



L'équation des moments autour du point D permet d'obtenir directement le couple dans la liaison

$$\sum \overrightarrow{M_{D,ext\rightarrow(6)}} = \vec{0}$$

On déduit :

$$-M.g.e + C_{36} = 0$$

$$C_{36} = M.g.e = 3000\ N.m$$

Q8. Déterminer l'expression de F_{12} permettant de maintenir le berceau 2 immobile par rapport à la tourelle 1. En déduire les valeurs maximale et minimale de F_{12}.

a. Choisir et justifier une stratégie d'isolement (ordre du ou des isolement(s) à effectuer)

Pour chaque isolement :

b. Faire le bilan des actions mécaniques extérieures sur l'isolement

c. Justifier le point choisi pour l'expression des moments

d. Poser la ou les équation(s) du PFS nécessaire(s) à la résolution

Note : Comme précédemment, ne perdez pas de temps à poser ce qui n'est pas utile

Finalement :

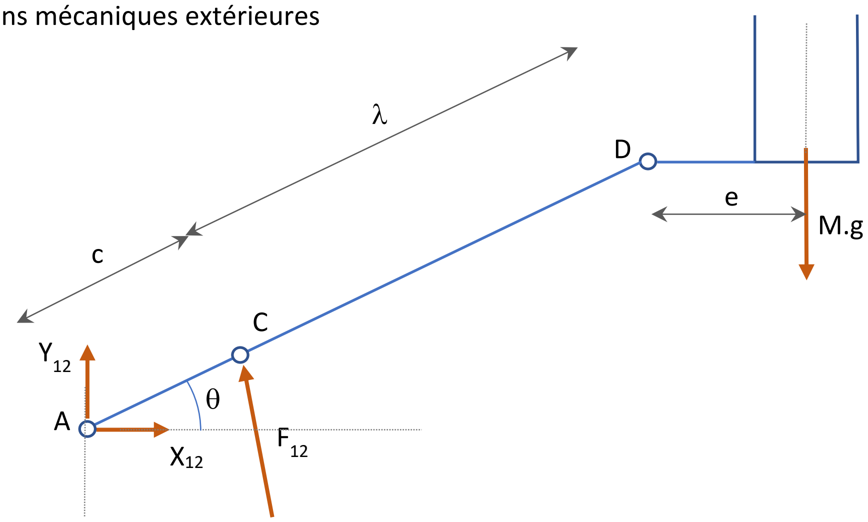
*e. **BONUS :** En déduire l'expression et les valeurs min et max de F_{12}*

En isolant (2+3+6), seule l'action de la pesanteur intervient comme action mécanique extérieure hormis la liaison pivot d'axe $(A,\overrightarrow{z_1})$ et la force du vérin que l'on cherche.

On suppose que le vérin (4) agit en C suivant la direction $\overrightarrow{y_4}$

On isole (2+3+6)

Bilan des actions mécaniques extérieures



L'équation des moments autour du point A permet d'obtenir directement la force du vérin

$$\sum \overrightarrow{M_{A,ext\rightarrow(2+3+6)}} = \vec{0}$$

On déduit :

$$-M.g.\{e + (c+\lambda).\cos(\theta)\} + F_{12}.c.\cos(\theta-\alpha) = 0$$

$$F_{12} = \frac{M.g.\{e + (c+\lambda).\cos(\theta)\}}{c.\cos(\theta - \alpha)}$$

La valeur minimale est obtenue pour θ=80° et α=40°

$$F_{12\,mini} = \frac{M.g.\{e + (c+\lambda_{mini}).\cos(80°)\}}{c.\cos(40°)} =$$

La valeur maximale est obtenue pour θ=0° et α=0°

$$F_{12\,Maxi} = \frac{M.g.\{e + (c+\lambda_{Maxi})\}}{c} = 30000\ N$$

Action du vent pendant le dressage (0° ≤ θ ≤ 80° et 0° ≤ α ≤ 40°)

Dans cette question, **<u>nous n'avons plus affaire à un problème plan</u>**.

Action mécanique supplémentaire

On considère qu'un vent de 50 km/h ne doit pas modifier l'orientation de la nacelle :

- L'action du vent sera considérée comme un glisseur d'axe $\overrightarrow{z_6}$: $F_{vent}\overrightarrow{z_6}$ au point G,
- Son intensité vaut 1000N.

Q9. Déterminer l'expression du couple C_{01} permettant de maintenir la tourelle 1 immobile par rapport au châssis 0. En déduire les valeurs maximale et minimale de C_{01}.

a. Choisir et justifier une stratégie d'isolement (ordre du ou des isolement(s) à effectuer)

Pour chaque isolement :

b. Faire le bilan des actions mécaniques extérieures sur l'isolement

c. Justifier le point choisi pour l'expression des moments

d. Poser la ou les équation(s) du PFS nécessaire(s) à la résolution

<u>Note :</u> Encore une fois, ne perdez pas de temps à poser ce qui n'est pas utile

Finalement :

*e. **<u>BONUS :</u>** En déduire l'expression et les valeurs min et max de C_{01}*

En isolant (1+2+3+6), seule l'action de la pesanteur et l'action du vent interviennent comme actionsmécaniques extérieures hormis l a liaison pivot d'axe $(O,\overrightarrow{y_0})$ et le couple C_{01} que l'on cherche.

On isole (1+2+3+6)

Bilan des actions mécaniques extérieures

Liaison 0-1 : $\begin{Bmatrix} X_{01} & L_{01} \\ Y_{01} & 0 \\ Z_{01} & N_{01} \end{Bmatrix}_{O,R1}$ Couple moteur : $\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_{01} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{O,R1}$ Pesanteur et vent : $\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -M.g & 0 \\ F_{vent} & 0 \end{Bmatrix}_{G,R1}$

L'équation des moments autour du point O permet d'obtenir directement le couple cherché

$$\sum \overrightarrow{M_{O,ext\to(1+2+3+6)}} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{OG} \wedge (-M.g.\overrightarrow{y_1} + F_{vent}\overrightarrow{z_1}) = \begin{pmatrix} \{-a + (c+\lambda)\cos(\theta) + e\} \\ \{b + (c+\lambda)\sin(\theta)\} \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -M.g \\ F_{vent} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \{b + (c+\lambda)\sin(\theta)\}.F_{vent} \\ -\{-a + (c+\lambda)\cos(\theta) + e\}.F_{vent} \\ -\{-a + (c+\lambda)\cos(\theta) + e\}.M.g \end{pmatrix}$$

En projetant l'équation des moments sur l'axe $(O,\overrightarrow{y_1})$, il vient :

$$C_{01} = \{-a + (c+\lambda)\cos(\theta) + e\}.F_{vent}$$

La valeur minimale est obtenue pour θ=80° et λ_{mini}

$$C_{01\,mini} = \frac{M.g.\{e + (c + \lambda_{mini}).\cos(80°)\}}{c.\cos(40°)} =$$

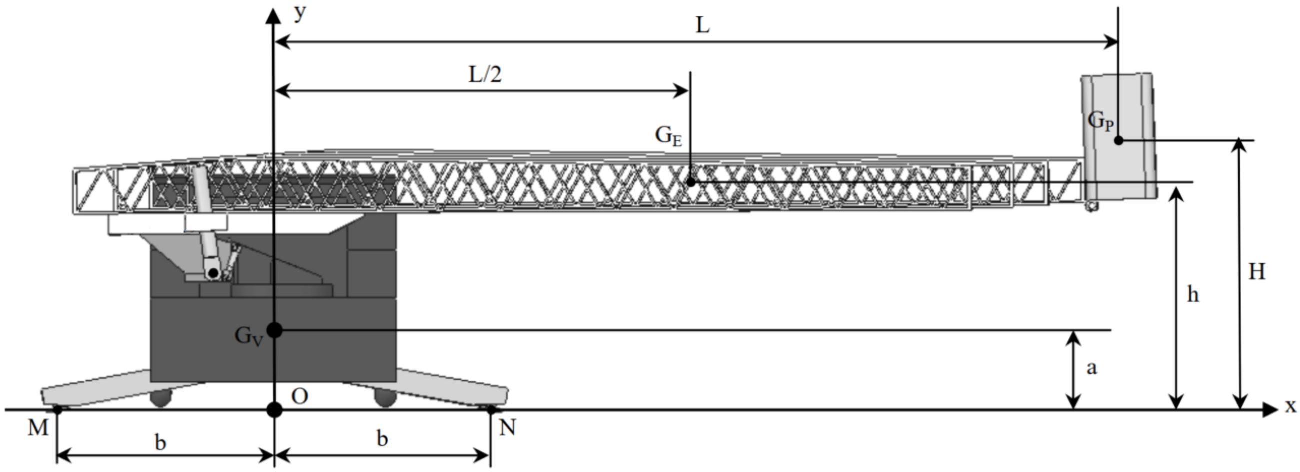
La valeur maximale est obtenue pour θ=0° et λ_{Maxi}

$$C_{01\,Maxi} = \{-a + (c + \lambda_{Maxi}) + e\}.F_{vent} =$$

Etude de la stabilité du véhicule porteur

Le véhicule porteur de l'E.P.A.S. doit être équipé de stabilisateurs. Une fois en place, les stabilisateurs le soulèvent, afin qu'il ne repose plus sur les roues : le mouvement des suspensions du véhicule mettrait en danger sa stabilité.

L'objet de cette partie est de déterminer la longueur de déploiement maximale que le système de sécurité pourra autoriser.



Le véhicule est dans la configuration de la figure ci-dessus :

- Parc échelle horizontal.
- Le véhicule ne repose pas sur les roues mais sur les stabilisateurs.
- Charge maximale dans la plate-forme.

Actions mécaniques

<u>Hypothèse : Le problème est considéré comme plan</u> (plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$ de la figure précédente).

Les efforts pris en compte sont :

- Les actions de pesanteur sur chaque élément.

Elément	C. de gravité	Masse
Véhicule, stabilisateurs et tourelle (1) considérés comme un seul solide S_V	G_V	m_V
Parc échelle (2 et 3) considérés comme un seul solide S_E	G_E	m_E
Plateforme et charge utile : solide S_P	G_P	m_P

- Les stabilisateurs considérés comme des appuis ponctuels parfaits d'axe $\vec{y}$ aux point M et N
- On note les résultantes aux appuis $\overrightarrow{R_M} = N_M\vec{y}$ et $\overrightarrow{R_N} = N_N\vec{y}$
- On considère que S_V et S_E sont en liaison pivot d'axe $\vec{z}$
- On considère que S_E et S_P sont en liaison pivot d'axe $\vec{z}$

<u>On ne fera aucun calcul dans cette partie. Il n'est nécessaire de poser aucune équation.</u>

Q10. Exprimer la condition de non basculement de l'ensemble.

Q11. Expliquer la démarche de détermination de la longueur L_{max} de déploiement au-delà de laquelle il y aura basculement.

a. Justifier la stratégie d'isolement (ordre du ou des isolement(s) à effectuer)

Pour chaque isolement :

b. Faire le bilan du nombre d'inconnues et d'équations

c. Expliquer quelle(s) équation(s) serai(ent) utile(s) à la résolution du problème (détermination de L_{max})

On pourra s'aider d'un graphe d'analyse simplifié si cela semble pertinent

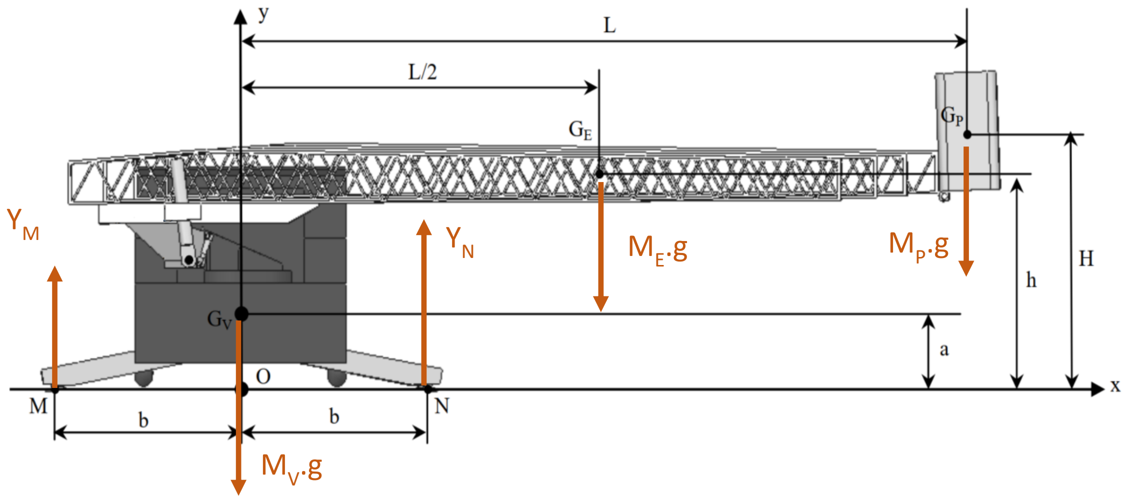
La condition de non basculement traduit la non perte de contact au niveau des liaisons au sol. La perte de contact possible ayant lieu en M, la condition s'écrit :

$$Y_M \geq 0$$

En isolant l'ensemble du véhicule + échelle+plateforme, on obtient directement les actions aux appuis à partir de 2 équations du PFS (sur y et autour de Nz)

On isole donc (V+E+P)

Bilan des actions mécaniques extérieures



L'équation des moments autour de N permet de trouver directement Y_M en fonction des masses et des longueurs

$\sum \overrightarrow{M_{N,ext\rightarrow(V+E+P)}} = \vec{0}$

$$-Y_M.2b + M_V.g.b - M_E.g.\left(\frac{L}{2} - b\right) - M_P.g.(L - b) = 0$$

On déduit :

$$(M_V + M_E + M_P).b - M_E.\left(\frac{L_{maxi}}{2}\right) - M_P.L_{maxi} = 0$$

$$L_{maxi} = \frac{2.(M_V + M_E + M_P)}{(M_E + 2.M_P)}.b$$