

# SUJET INSA 2020 – Chariot porte nacelle - Correction

Le système considéré est un véhicule porteur équipé d'un bras articulé au bout duquel est montée une nacelle (voir exemple en figure 1). Ce type d'équipement est couramment utilisé dans les chantiers qui nécessitent le travail d'un opérateur en hauteur (maintenance de l'éclairage public, élagage d'arbres...). Un chariot porte-nacelle est généralement tracté à l'arrière d'un camion.

Le système  $\mathbf{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  étudié ici est celui schématisé sur la figure 2. Il s'agit d'une structure à deux bras, le second bras étant télescopique. La figure 2a représente la configuration repliée (pour les trajets) et la figure 2b une configuration déployée (l'opérateur dans la nacelle est alors à 15 mètres de hauteur par rapport au sol).

Le repère  $\mathcal{R}_0(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z})$  est attaché au sol  $\mathbf{0}$  (partie fixe). Le système est composé des éléments suivants :

- un chariot support **1**. Ce chariot repose sur le sol  $\mathbf{0}$  par le biais de 4 roues. La liaison entre **1** et  $\mathbf{0}$  est une pivot parfaite d'axe  $(O\vec{y}_0)$ .

- un plateau tournant **2**

- un bras principal **3**

- un sous-ensemble **4** comportant le bras secondaire, une nacelle et un opérateur. Un dispositif non représenté permet de maintenir la nacelle en position verticale.

- un vérin **5** qui sert à créer le mouvement du bras **3** par rapport au plateau **2**

- un vérin **6** qui sert à créer le mouvement du sous-ensemble **4** par rapport au bras **3**

Les liaisons entre **2** et **3**, entre **2** et **5**, entre **3** et **5**, entre **3** et **4**, entre **3** et **6**, entre **4** et **6** sont des liaisons pivots parfaites

## 1 – Statique.

On étudie dans cette partie la stabilité du système dans une configuration de travail limite (nacelle décentrée vers l'arrière et terrain en pente) représentée sur la figure 3. Le système est supposé à l'équilibre. La masse de **1** est notée  $m$ . Le centre de gravité de **1** est noté  $G_1$ . Les forces de gravité sur **1** réduites au point  $G_1$  admettent une résultante de valeur  $m\vec{g}$ . La masse de l'ensemble  $\mathbf{E} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$  est aussi égale à  $m$ . Le centre de gravité de  $\mathbf{E}$  lorsqu'il est dans la configuration étudiée est noté  $G_E$ . Les forces de gravité sur  $\mathbf{E}$  réduites au point  $G_E$  admettent une résultante de valeur  $m\vec{g}$  (voir figure 3).

On considère, dans un premier temps, que les roues avant sont libres de tourner par rapport au corps du chariot alors que les roues arrières sont solidaires du corps du chariot (roues bloquées par un système de freinage). Dans ces conditions, l'action du sol  $\mathbf{0}$  sur les deux roues avant peut être assimilée à un contact ponctuel sans frottement au point  $A$ . Par contre, l'action du sol  $\mathbf{0}$  sur les deux roues arrières peut être assimilée à un contact avec frottement au point  $B$ . Il en découle deux efforts ayant la forme suivante (en projection dans la base  $\mathcal{B}_0$ ) :

$$[0/1 \text{ en } A] = N_A \vec{y}_0 \quad [0/1 \text{ en } B] = T_B \vec{x}_0 + N_B \vec{y}_0$$

Soient  $A(3, 0, 0)$ ,  $B(-3, 0, 0)$ ,  $G_1(0, 1, 0)$ ,  $G_E(-3, 5, 0)$  les coordonnées des points dans le repère  $\mathcal{R}_0(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z})$

Dans cette partie, tous les calculs seront faits en projection dans la base  $\mathcal{B}_0$ .. Nous nous limiterons ici à un cas plan : le plan  $(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0)$  est considéré comme un plan de symétrie du problème.

1.1) Appliquer le principe fondamental de la statique au système  $\mathbf{S} = \{1, \mathbf{E}\}$  au point  $B$ . Donner les trois équations qui découlent directement de l'expression de ce principe.

1.2) Dédurre des résultats précédents l'expression de  $N_A$ ,  $N_B$  et  $T_B$  en fonction de  $m$ ,  $g$  et  $\alpha$ .

1.3) Déterminer quelle est la valeur  $\alpha_{Basc}$  de  $\alpha$  à partir de laquelle on assiste à une perte de contact au point  $A$  (basculement autour de  $B$ ).



Figure 1 – Modèle à 3 bras de la marque "Manitou"

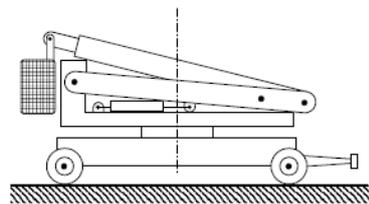


Figure 2a – Système replié

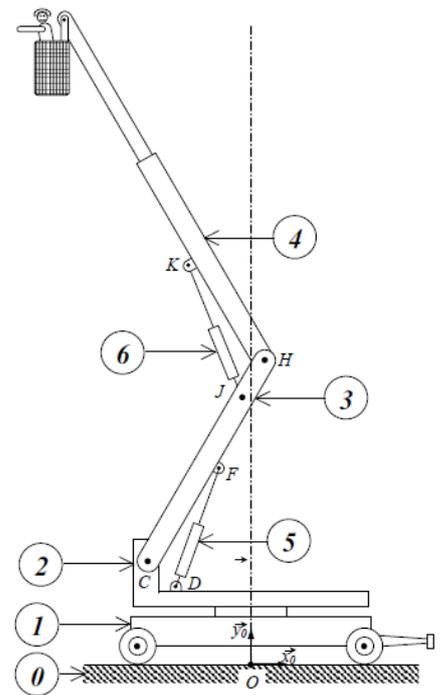
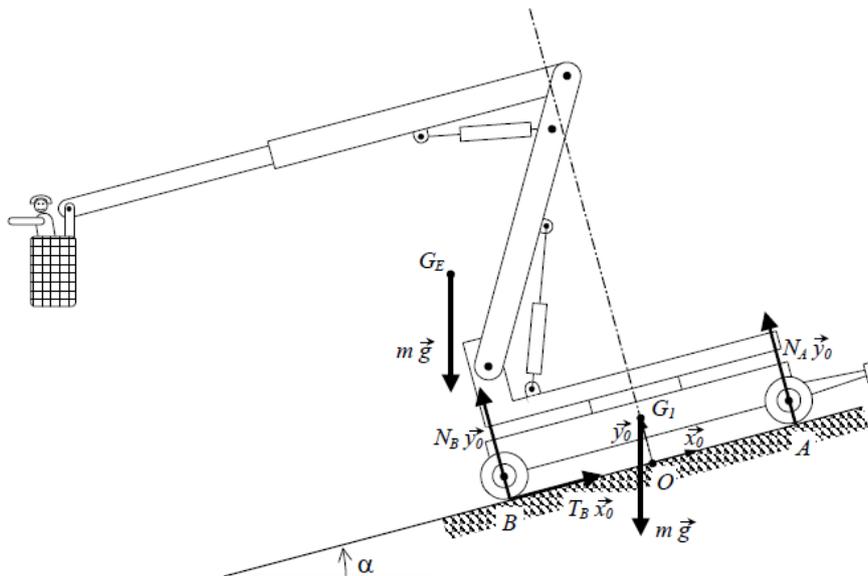


Figure 2b – Système déployé

Q1.1 - Appliquer le PFS à l'ensemble S au point B et donner les 3 équations obtenues (problème plan)

On isole (S)

On fait le bilan des actions mécaniques extérieures au système étudié



On écrit les équations du PFS que l'on projette sur  $\vec{x}_0$  et  $\vec{y}_0$

$$\Sigma \vec{F}_{ext \rightarrow (S)} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} T_B - m \cdot g \cdot \sin(\alpha) - m \cdot g \cdot \sin(\alpha) = 0 \\ N_A + N_B - m \cdot g \cdot \cos(\alpha) - m \cdot g \cdot \cos(\alpha) = 0 \end{cases}$$

$$\Sigma \vec{M}_{B \text{ ext} \rightarrow (S)} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad 6 \cdot N_A + m \cdot g \cdot \sin(\alpha) \cdot 1 + m \cdot g \cdot \sin(\alpha) \cdot 5 - m \cdot g \cdot \cos(\alpha) \cdot 3 = 0$$

### Q1.2 - Dédire des équations obtenues les expressions de $N_A$ , $T_B$ et $N_B$ .

On déduit :

$$N_A = \frac{1}{2} * m. g. \cos(\alpha) - m. g. \sin(\alpha)$$

$$N_B = \frac{3}{2} * m. g. \cos(\alpha) + m. g. \sin(\alpha)$$

$$T_B = 2 * m. g. \sin(\alpha)$$

### Q1.3 - Traduire la condition de non décollement

Le non décollement en A se traduit par :  $N_A > 0$

On déduit :

$$\frac{1}{2} * m. g. \cos(\alpha_{basc}) - m. g. \sin(\alpha_{basc}) > 0$$

$$\tan(\alpha_{basc}) < \frac{1}{2}$$

$$\alpha_{basc} < 26,5^\circ$$

## **2 – Cinématique.**

On se limite dans un premier temps à l'étude des mouvements des bras **3** et **4** par rapport au plateau **2** supposé fixe (voir figure 4). Le repère  $\mathcal{R}_2 = (C; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$  lié à **2** est le repère d'observation.  $\theta$  est l'angle qui positionne le repère  $\mathcal{R}_3 = (C; \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z})$  lié à **3** par rapport à  $\mathcal{R}_2$  (voir figure 5).  $\varphi$  étant l'angle qui positionne le repère  $\mathcal{R}_4 = (H; \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z})$  lié à **4** par rapport à  $\mathcal{R}_3$  (voir figure 5).  $P$  est le point situé à l'extrémité du bras **4**. On pose  $CH = a$ ,  $HP = b$ .

Après avoir dessiné les repères de changement de base

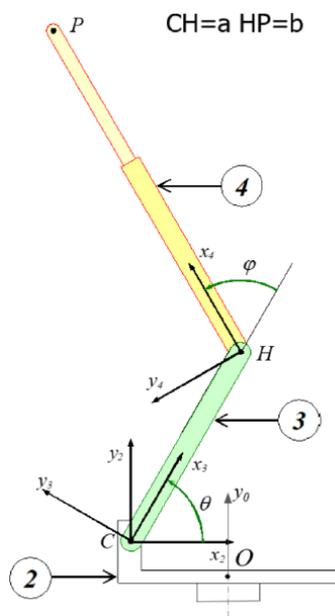
2.1) Donner l'expression de la vitesse  $\vec{V}_{(P \in 4 / 2)}$  en projection dans la base  $\mathcal{B}_4 = (\vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z})$  en fonction de  $a$ ,  $b$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $\dot{\theta}$  et  $\dot{\varphi}$ .

2.2) Donner l'expression de l'accélération  $\vec{a}_{(P \in 4 / 2)}$  en projection dans la base  $\mathcal{B}_4 = (\vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z})$  en fonction de  $a$ ,  $b$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\varphi}$ ,  $\ddot{\theta}$  et  $\ddot{\varphi}$ .

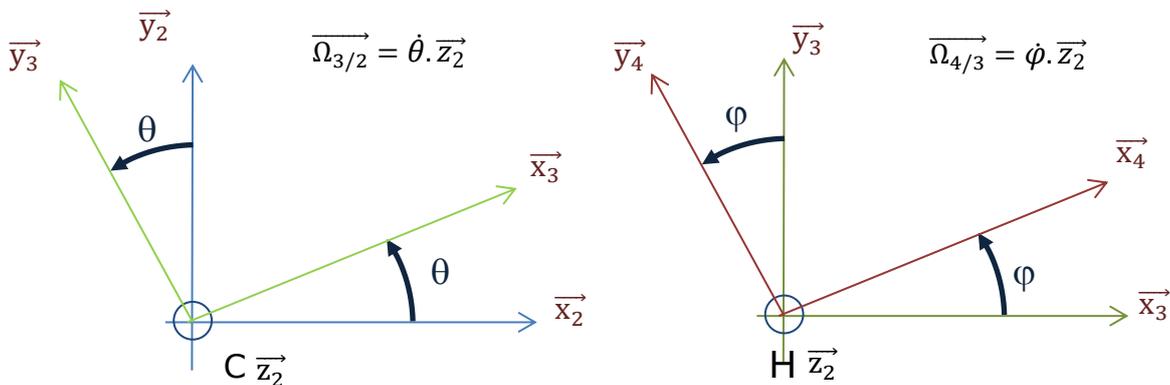
Dans le cas où l'on prend en considération la rotation du plateau **2** autour de l'axe  $O\vec{y}_1$ ,  $\psi$  étant l'angle qui positionne le repère  $\mathcal{R}_2 = (C; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$  lié à **2** par rapport au chariot **1** supposé fixe. On pose

$$O\vec{C} = -R\vec{x}_2 + h\vec{y}_2$$

2.3) Dessiner le nouveau repère de changement de base et déterminer l'expression de la vitesse  $\vec{V}_{(P \in 4 / 1)}$ .



Q2.1 – Donner l'expression de la vitesse  $\vec{V}_{(P \in 4/2)}$  en fonction des paramètres de mouvement et de leurs dérivées



$$\vec{V}_{P \in 4/2} = \frac{d(\overline{CP})}{dt} = \frac{d(\overline{CH} + \overline{HP})}{dt} = \frac{d}{dt}(a\overline{x}_3 + b\overline{x}_4)$$

$$\vec{V}_{P \in 4/2} = a \cdot \frac{d(\overline{x}_3)}{dt} + b \cdot \frac{d(\overline{x}_4)}{dt}$$

$$\frac{d(\overline{x}_3)}{dt} = \overline{\Omega}_{3/2} \wedge \overline{x}_3 = \dot{\theta} \cdot \overline{z}_2 \wedge \overline{x}_3 = \dot{\theta} \cdot \overline{y}_3$$

$$\frac{d(\overline{x}_4)}{dt} = \overline{\Omega}_{4/2} \wedge \overline{x}_4 = (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \cdot \overline{z}_2 \wedge \overline{x}_4 = (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \cdot \overline{y}_4$$

On déduit :

$$\vec{V}_{P \in 4/2} = a \cdot \dot{\theta} \cdot \overline{y}_3 + b \cdot (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \cdot \overline{y}_4$$

Dans la base  $b_4$ ,

$$\vec{V}_{P \in 4/2} = \begin{pmatrix} a \cdot \dot{\theta} \cdot \sin(\varphi) \\ a \cdot \dot{\theta} \cdot \cos(\varphi) + b \cdot (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \\ 0 \end{pmatrix}_{b_4}$$

Q2.2 – Donner l'expression de l'accélération  $\overrightarrow{a}_{(P \in 4/2)}$  en fonction des paramètres de mouvement et de leurs dérivées

$$\vec{a}_{P \in 4/2} = \frac{d\vec{V}_{P \in 4/2}}{dt} = \frac{d}{dt} (a \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y}_3 + b \cdot (\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \cdot \vec{y}_4)$$

$$\vec{a}_{P \in 4/2} = \left( a \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{y}_3 + a \cdot \dot{\theta} \cdot \frac{d}{dt}(\vec{y}_3) + b \cdot (\ddot{\theta} + \ddot{\varphi}) \cdot \vec{y}_4 + b \cdot (\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \cdot \frac{d}{dt}(\vec{y}_4) \right)$$

$$\frac{d(\vec{y}_3)}{dt} = \overrightarrow{\Omega}_{3/2} \wedge \vec{y}_3 = \dot{\theta} \cdot \vec{z}_2 \wedge \vec{y}_3 = -\dot{\theta} \cdot \vec{x}_3$$

$$\frac{d(\vec{y}_4)}{dt} = \overrightarrow{\Omega}_{4/2} \wedge \vec{y}_4 = (\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \cdot \vec{z}_2 \wedge \vec{y}_4 = -(\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \cdot \vec{x}_4$$

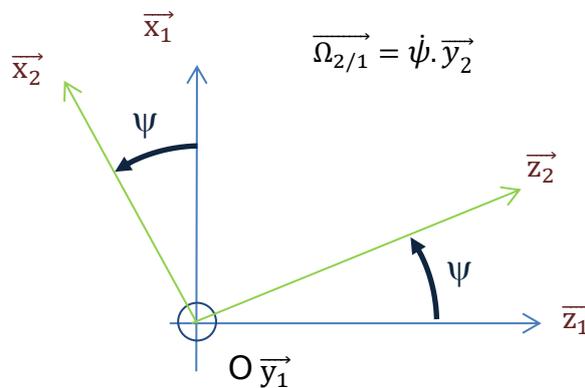
On déduit :

$$\vec{a}_{P \in 4/2} = \left( a \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{y}_3 - a \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{x}_3 + b \cdot (\ddot{\theta} + \ddot{\varphi}) \cdot \vec{y}_4 - b \cdot (\dot{\theta} + \dot{\varphi})^2 \cdot \vec{x}_4 \right)$$

Dans la base  $b_4$ ,

$$\vec{a}_{P \in 4/2} = \begin{pmatrix} -a \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos(\varphi) + a \cdot \ddot{\theta} \cdot \sin(\varphi) - b \cdot (\dot{\theta} + \dot{\varphi})^2 \\ -a \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\varphi) + a \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos(\varphi) + b \cdot (\ddot{\theta} + \ddot{\varphi}) \\ 0 \end{pmatrix}_{b_4}$$

Q2.3 – Dessiner la figure plane et donner l'expression de la vitesse  $\overrightarrow{V}_{(P \in 4/1)}$  en fonction des paramètres de mouvement et de leurs dérivées



Connaissant la vitesse  $\vec{V}_{P \in 4/2}$  et le vecteur rotation  $\overrightarrow{\Omega}_{2/1}$ , le plus direct est d'utiliser la formule de la composition des vitesses

$$\vec{V}_{P \in 4/1} = \vec{V}_{P \in 4/2} + \vec{V}_{P \in 2/1}$$

$$\vec{V}_{P \in 2/1} = \overrightarrow{\Omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{OP} \text{ car le mouvement de } 2/1 \text{ est un mouvement de rotation autour de l'axe } O\vec{y}_1$$

$$\vec{V}_{P \in 2/1} = \overrightarrow{\Omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{OP} = \dot{\psi} \cdot \vec{y}_2 \wedge (-R \cdot \vec{x}_2 + h \cdot \vec{y}_2 + a \vec{x}_3 + b \vec{x}_4)$$

$$\vec{V}_{P \in 2/1} = R \cdot \dot{\psi} \cdot \vec{z}_2 - a \cdot \cos(\theta) \cdot \dot{\psi} \cdot \vec{z}_2 - b \cdot \cos(\theta + \varphi) \cdot \dot{\psi} \cdot \vec{z}_2$$

Il suffit alors d'ajouter cette expression à la vitesse obtenue en question 2.1