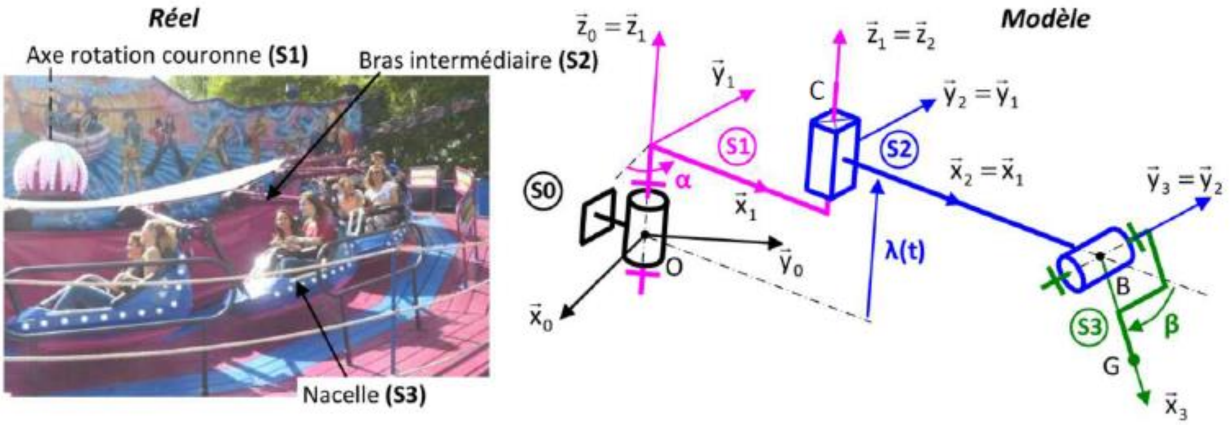
SUJET INSA 2019 – Manège chenille - Correction

On s'intéresse dans ce problème à un manège rencontré dans les fêtes foraines, inspiré du manège communément appelé « la chenille » et qui est une version améliorée pour plus de sensations fortes.

Ce type d'attraction permet de procurer des sensations importantes aux passagers, à la fois en marche avant et en arrière par un mouvement de « brassage ». L'ensemble tourne à une vitesse maximale de 14 tours/min.

Les voitures sont suspendues par le haut et peuvent basculer de gauche à droite à chaque dos d'âne. Au plus haut de ces bosses, les nacelles se retournent quasiment « à l'envers ».

Etude 1 : Mouvement de la nacelle



Dans un premier temps, on s'intéresse au mouvement de la nacelle (S3) du manège dont on donne une description structurelle ainsi qu'une modélisation cinématique.

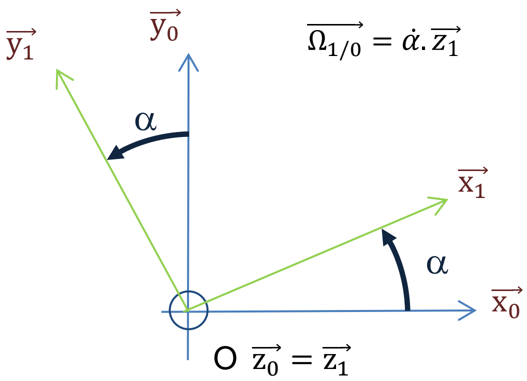
On considère le système constitué des sous-ensembles nommés (S1), (S2) et (S3) pour lesquels on associe un repère $\mathcal{R}_i$. Chaque repère $\mathcal{R}_i$ possède la base notée $\mathcal{B}_i = (\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$

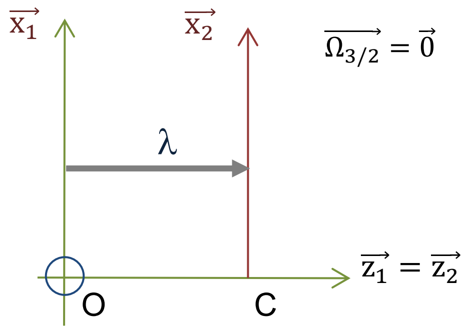
- Le solide (S1) qui correspond à la couronne centrale du manège est en liaison pivot d'axe $(O\,\vec{z}_0)$ avec le bâti (S0) de paramètre de position $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$
- Le bras intermédiaire (S2) est en liaison glissière de direction $(C\,\vec{z}_1)$ avec la couronne centrale (S1) de paramètre de position λ
- La nacelle (S3) est en liaison pivot d'axe $(B\,\vec{y}_2)$ avec le bras (S2) de paramètre de position . $\beta = (\vec{x}_2, \vec{x}_3)$

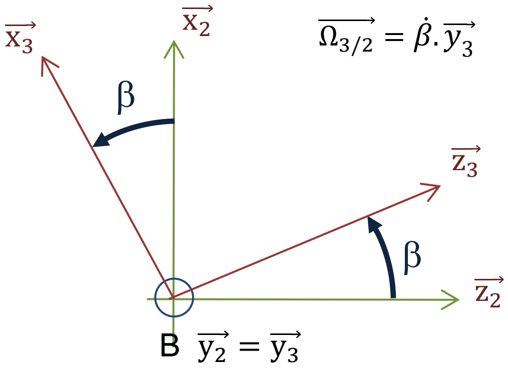
On pose $\vec{OB} = a\,\vec{x}_1 + \lambda(t)\,\vec{z}_0 + b\,\vec{x}_2$ et $\vec{BG} = l\,\vec{x}_3$ où. G correspond au centre de gravité de la nacelle (S3).

Dessiner les changements de repère où seront spécifiés précisément les angles α et β positifs.

Q1 - Calculer, par la méthode de votre choix, le vecteur vitesse du point G appartenant au solide (S3) dans son mouvement par rapport à (S_0) : $\overrightarrow{V_{(G\in 3/0)}}$







$$\vec{V}_{G\in 3/0} = \frac{d\left(\overrightarrow{OG}\right)}{dt} = \frac{d\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BG}\right)}{dt} = \frac{d}{dt}(a.\overrightarrow{x_1} + \lambda.\overrightarrow{z_0} + l.\overrightarrow{x_3})$$

$$\vec{V}_{G\in 3/0} = a.\frac{d(\overrightarrow{x_1})}{dt} + \dot{\lambda}.\overrightarrow{z_0} + l.\frac{d(\overrightarrow{x_3})}{dt}$$

$$\frac{d(\overrightarrow{x_1})}{dt} = \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{x_1} = \dot{\alpha}.\overrightarrow{z_1} \wedge \overrightarrow{x_1} = \dot{\alpha}.\overrightarrow{y_1}$$

$$\frac{d(\overrightarrow{x_3})}{dt} = \overrightarrow{\Omega_{3/0}} \wedge \overrightarrow{x_3} = \left(\dot{\alpha}.\overrightarrow{z_1} + \dot{\beta}.\overrightarrow{y_3}\right) \wedge \overrightarrow{x_3} = (\dot{\alpha}.\overrightarrow{z_1} \wedge \overrightarrow{x_3}) + \left(\dot{\beta}.\overrightarrow{y_3} \wedge \overrightarrow{x_3}\right)$$

$$\frac{d(\overrightarrow{x_3})}{dt} = (\dot{\alpha}.\overrightarrow{z_2} \wedge \overrightarrow{x_3}) + \left(\dot{\beta}.\overrightarrow{y_3} \wedge \overrightarrow{x_3}\right) = \dot{\alpha}.\cos(\beta)\,.\overrightarrow{y_2} - \dot{\beta}.\overrightarrow{z_3}$$

On déduit :

$$\vec{V}_{G\in 3/0} = a.\dot{\alpha}.\overrightarrow{y_1} + \dot{\lambda}.\overrightarrow{z_1} + l.\dot{\alpha}.\cos(\beta)\,.\overrightarrow{y_2} - l.\dot{\beta}.\overrightarrow{x_3}$$

$$\vec{V}_{G\in 3/0} = (a + l.\cos(\beta)).\dot{\alpha}.\overrightarrow{y_1} + \dot{\lambda}.\overrightarrow{z_1} - l.\dot{\beta}.\overrightarrow{x_3}$$

Q2 – Donner l'expression de l'accélération $\vec{a}_{G\in 3/0}$ *en fonction des paramètres de mouvement et de leurs dérivées*

$$\vec{a}_{G\in 3/0} = \frac{d\vec{V}_{G\in 3/0}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[(a + l.\cos(\beta)).\dot{\alpha}.\overrightarrow{y_1} + \dot{\lambda}.\overrightarrow{z_1} - l.\dot{\beta}.\overrightarrow{z_3}\right]$$

$$\vec{a}_{G\in 3/0} = \left((a + l.\cos(\beta)).\ddot{\alpha}.\overrightarrow{y_1} - \left(l.\dot{\beta}.\sin(\beta)\right).\dot{\alpha}.\overrightarrow{y_1} + (a + l.\cos(\beta)).\dot{\alpha}.\frac{d\overrightarrow{y_1}}{dt} + \ddot{\lambda}.\overrightarrow{z_1} - l.\ddot{\beta}.\overrightarrow{z_3} - l.\dot{\beta}.\frac{d\overrightarrow{z_3}}{dt}\right)$$

$$\frac{d(\overrightarrow{y_1})}{dt} = \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge (\overrightarrow{y_1}) = \dot{\alpha}.\overrightarrow{z_1} \wedge \overrightarrow{y_1} = -\dot{\alpha}.\overrightarrow{x_1}$$

$$\frac{d(\overrightarrow{z_3})}{dt} = \overrightarrow{\Omega_{3/0}} \wedge \overrightarrow{z_3} = \left(\dot{\alpha}.\overrightarrow{z_1} + \dot{\beta}.\overrightarrow{y_3}\right) \wedge \overrightarrow{z_3} = \dot{\alpha}.\sin(\beta).\overrightarrow{y_1} + \dot{\beta}.\overrightarrow{x_3}$$

On déduit :

$$\vec{a}_{G\in 3/0} = [(a + l.\cos(\beta)).\ddot{\alpha}.\overrightarrow{y_1} - (a + l.\cos(\beta)).\dot{\alpha}^2.\overrightarrow{x_1}] - 2l.\sin(\beta).\dot{\alpha}.\dot{\beta}.\overrightarrow{y_1} + \left[\ddot{\lambda}.\overrightarrow{z_1}\right] + \left[-l.\ddot{\beta}.\overrightarrow{z_3} - l.\dot{\beta}^2.\overrightarrow{x_3}\right]$$

On reconnait les trois termes correspondant à chaque mouvement simple et le terme de Coriolis (avec un 2 devant)

<u>Q3 – Soit $\vec{G} = \vec{g} - \vec{a}_{G\in 3/0}$, le nombre de « g »ressenti par le passager du manège dont le centre de gravité est en G. Projeter alors ce vecteur $\vec{G}$ sur la base $(\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$ et écrire seulement la composante suivant l'axe $\overrightarrow{x_3}$ correspondant à l'axe de la colonne vertébrale du passager</u>

$$\vec{G} = \vec{g} - \vec{a}_{G\in 3/0} = -g.\overrightarrow{z_1} - \left([(a + l.\cos(\beta)).\ddot{\alpha}.\overrightarrow{y_1} - (a + l.\cos(\beta)).\dot{\alpha}^2.\overrightarrow{x_1}] - 2l.\sin(\beta).\dot{\alpha}.\dot{\beta}.\overrightarrow{y_1} + \left[\ddot{\lambda}.\overrightarrow{z_1}\right] + \left[-l.\ddot{\beta}.\overrightarrow{z_3} - l.\dot{\beta}^2.\overrightarrow{x_3}\right]\right)$$

Le vecteur $\vec{G}$ sur la base $(\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$ s'écrit alors :

$$\vec{G} = \begin{pmatrix} l.\dot{\beta}^2 + \ddot{\lambda}.\sin(\beta) + g.\sin(\beta) + (a + l.\cos(\beta)).\dot{\alpha}^2.\cos(\beta) \\ -(a + l.\cos(\beta)).\ddot{\alpha} + 2l.\sin(\beta).\dot{\alpha}.\dot{\beta} \\ l.\ddot{\beta} - \ddot{\lambda}.\cos(\beta) - g.\cos(\beta) + (a + l.\cos(\beta)).\dot{\alpha}^2.\sin(\beta) \end{pmatrix}_{b_3}$$

La composante sur $\overrightarrow{x_3}$ vaut alors :

$$G_x = l.\dot{\beta}^2 + \ddot{\lambda}.\sin(\beta) + g.\sin(\beta) + (a + l.\cos(\beta)).\dot{\alpha}^2.\cos(\beta)$$

<u>Critère de conception</u> : La valeur maximale de l'accélération reçue par un passager d'une masse de 70 kg pour un angle $\beta = \frac{\pi}{2} = cste$ et une accélération radiale $\ddot{\lambda} = 1{,}6\ m/s^2$ sera de 2g

<u>Q4 – Pour la configuration correspondant à celle définie dans l'exigence du cahier des charges, déterminer l'accélération équivalente « ressentie » par le passager et commenter la valeur obtenue</u>

Avec ces hypothèses, on trouve :

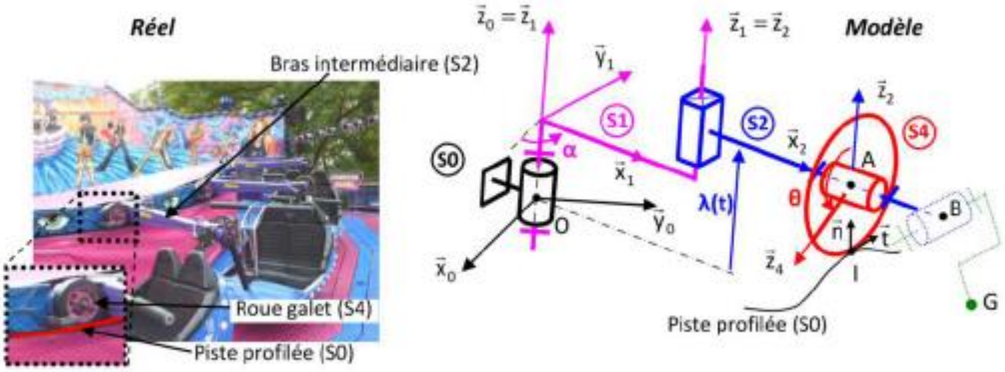
$$G_x = 0 + \ddot{\lambda}.\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + g.\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \left(a + l.\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right).\dot{\alpha}^2.\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ddot{\lambda} + g = 11{,}6\ m/s^2$$

$$G_x = 1{,}16.g < 2.g$$

Le cahier des charges est validé.

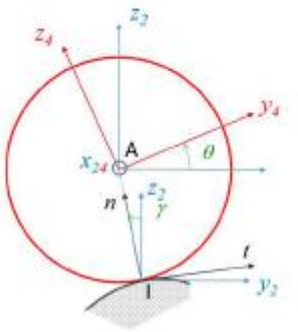
Etude 2 : Commande d'élévation du manège

On s'intéresse maintenant au lien entre la translation verticale λ(t) et la rotation du manège α. La translation verticale du bras intermédiaire (S2) est en fait obtenue par l'intermédiaire de roues qui roulent sur une piste profilée fixe et liée au solide (S0). On donne sur la figure suivante, le modèle cinématique correspondant :



On considère le système constitué des sous-ensembles nommés (S1), (S2) et (S4) pour lesquels on associe un repère $\mathcal{R}_i$. Chaque repère $\mathcal{R}_i$ possède la base notée $\mathcal{B}_i = (\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$

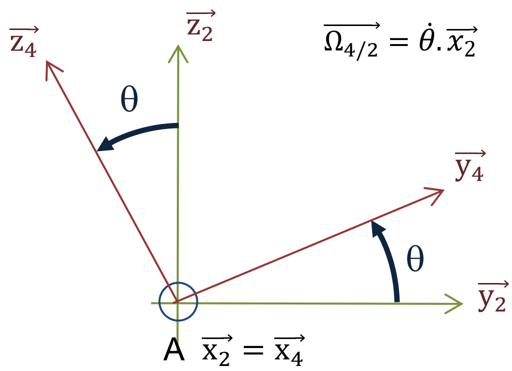
- Le solide (S1) qui correspond à la couronne centrale du manège est en liaison pivot d'axe $(O\vec{z}_0)$ avec le bâti (S0) de paramètre de position $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$
- Le bras intermédiaire (S2) est en liaison glissière de direction $(C\vec{z}_1)$ avec la couronne centrale (S1) de paramètre de position λ
- La roue (S4) est en liaison pivot autour de l'axe $(A\vec{x}_2)$ avec le bras intermédiaire (S2) de paramètre de position $\theta = (\vec{y}_2, \vec{y}_4)$) et roule sur la piste au point de contact I. On note $\vec{n}$ la normale à la surface de contact et $\vec{t}$ la tangente au contact. On note $\gamma = (\vec{z}_2, \vec{n})$ l'angle entre la normale au contact et la verticale.



On pose $\vec{OA} = L\vec{x}_1 + \lambda(t)\vec{z}_0$ et $\vec{IA} = R\,\vec{n}$

Q5. Déterminer la vitesse de glissement I , $\vec{V}_{I\in 4/0}$ au point de contact I entre la roue galet (S4) et la piste profilée liée au bâti (S0). Projeter cette vitesse sur la base $(\vec{x}, \vec{t}, \vec{n})$

On représente la figure plane du mouvement de la roue *(S4)/(S0).*



$$\vec{V}_{I\in 4/0} = \vec{V}_{I\in 4/2} + \vec{V}_{I\in 2/1} + \vec{V}_{I\in 1/0}$$

Nature du mouvement de 4/2 : rotation autour de A$\overrightarrow{x_2}$
$\vec{V}_{I\in 4/2} = \vec{\Omega}_{(4/2)} \wedge \overrightarrow{AI} = \dot{\theta}.\overrightarrow{x_2} \wedge (-R.\vec{n}) = R.\dot{\theta}.\vec{t}$

Nature du mouvement de 2/1 : translation d'axe $\overrightarrow{z_1} = \overrightarrow{z_2}$
$\vec{V}_{I\in 2/1} = \dot{\lambda}.\overrightarrow{z_2} = \dot{\lambda}.\cos(\gamma).\vec{n} + \dot{\lambda}.\sin(\gamma).\vec{t}$

Nature du mouvement de 1/0 : rotation autour de O$\overrightarrow{z_1}$
$\vec{V}_{I\in 1/0} = \vec{\Omega}_{(1/0)} \wedge \overrightarrow{OI} = \dot{\alpha}.\overrightarrow{z_1} \wedge (L.\overrightarrow{x_1} + \lambda.\overrightarrow{z_1} - R.\vec{n}) = L.\dot{\alpha}.\overrightarrow{y_1} - R.\dot{\alpha}.\overrightarrow{z_2} \wedge \vec{n} = L.\dot{\alpha}.\overrightarrow{y_1} - R.\dot{\alpha}.\sin(\gamma).\overrightarrow{x_2}$

En rassemblant les termes et en projetant dans *la base* $(\vec{x},\vec{t},\vec{n})$

$$\vec{V}_{I\in 4/0} = \begin{pmatrix} -R.\dot{\alpha}.\sin(\gamma) \\ R.\dot{\theta} + \dot{\lambda}.\sin(\gamma) + L.\dot{\alpha}.\cos(\gamma) \\ \dot{\lambda}.\cos(\gamma) - L.\dot{\alpha}.\sin(\gamma) \end{pmatrix}$$

Q5. Quelle relation a-t-on nécessairement sur cette vitesse de glissement si on considère qu'il n'y a pas de décollement entre la roue galet (S4) et la piste profilée (S0) suivant la normale $\vec{n}$
En déduire de cette condition de non décollement que $\dot{\lambda} = L.\dot{\alpha}.\tan(\gamma)$

La condition de non décollement se traduit par une condition de vitesse relative nulle sur l'axe $\vec{n}$

On déduit : $\dot{\lambda}.\cos(\gamma) - L.\dot{\alpha}.\sin(\gamma) = 0$

D'où : $\dot{\lambda} = L.\dot{\alpha}.\tan(\gamma)$

Q6. Peut-on avoir roulement sans glissement au point I ? Donner un cas particulier pour la forme de la piste qui permet d'utiliser cette hypothèse puis commenter le mouvement du manège dans ce cas particulier. Dans le cas où il y aurait roulement sans glissement, déterminer la relation entre $\dot{\alpha}$ *et* $\dot{\theta}$ *.*

La condition de roulement sans glissement s'écrit :
$$\vec{V}_{I\in 4/0} = \vec{0}$$
On déduit :
$$\begin{cases} R.\dot{\alpha}.\sin(\gamma) = 0 \\ R.\dot{\theta} + \dot{\lambda}.\sin(\gamma) + L.\dot{\alpha}.\cos(\gamma) = 0 \end{cases}$$

Il y a roulement sans glissement uniquement si $\gamma = 0$ (s'il y a mouvement du manège $\dot{\alpha} \neq 0$)
La piste est alors horizontale (ce qui présente peu d'intérêt)
Le mouvement du manège est dans ce cas un mouvement de rotation autour de l'axe O$\overrightarrow{z_1}$

On obtient alors la relation :
$R.\dot{\theta} + \dot{\lambda}.\sin(\gamma) + L.\dot{\alpha}.\cos(\gamma) = 0$

Avec un angle $\gamma = 0$, il vient :
$$R.\dot{\theta} + L.\dot{\alpha} = 0$$