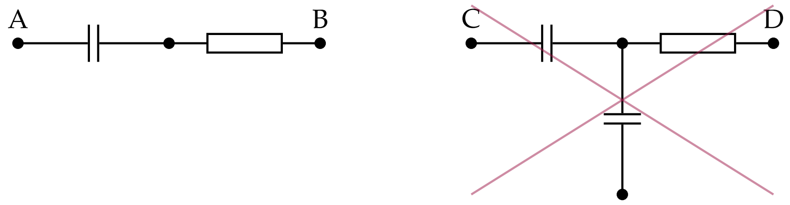
Circuits électriques - lois de Kirchhoff

1 Composants d'un circuit

Un circuit électrique est simplement un assemblage de dipôles (composants électriques) reliés par des fils conducteurs.

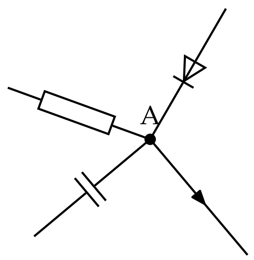
Définition 1.1 — Branche.
Une **branche** est une portion de circuit qui ne contient aucun embranchement (ou les composants sont simplement en série les uns après les autres).



AB est une branche, mais CD n'en est pas une car du courant pourrait s'échapper via le condensateur du milieu.

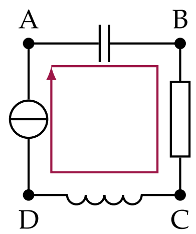
Tous les composants d'une même branche sont parcourus par un **même courant**.

Définition 1.2 — Nœud.
Un **nœud** est un point du circuit où plusieurs branches se rencontrent.



A est un nœud.

Définition 1.3 — Maille.
Une **maille** est une suite de branches qui revient au même point de départ.



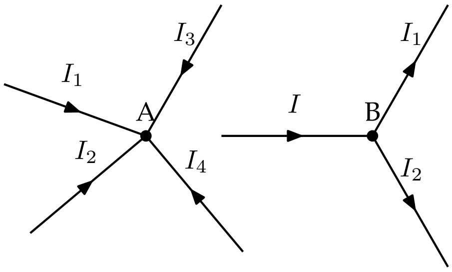
Maille ABCD. On précise le sens de parcourt d'une maille par une flèche.

2 Loi des Nœuds

Comme le courant est un débit de charge, c'est une quantité qui doit se conserver (ce qui rentre = ce qui sort), par conséquent :

Théorème 2.1 — Loi des Noeuds.
La **somme des courants** qui arrive dans un nœud est **nulle**.
Attention, il faut bien écrire la somme de façon algébrique en contant les courants **entrants** dans un nœud comme **positifs**, et les courants **sortants** comme **négatifs**.

$$\boxed{\sum_k I_k = 0}$$



Cas particulier important : si une branche se sépare en deux, on a :

$$I = I_1 + I_2$$

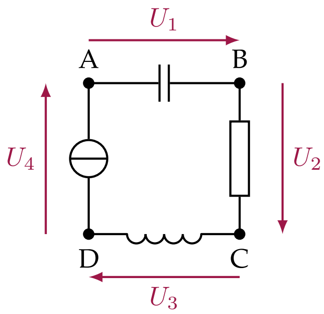
R En particulier, cela signifie bien que le courant circulant au sein d'une branche est le même partout.

3 Loi des Mailles

Puisque le calcul de la différence de potentiel ne dépend pas du chemin suivi, si on part d'un point et qu'on revient à ce point en passant par d'autres, la différence de potentiel totale doit être nulle.

Théorème 3.1 — Loi des Mailles.
La somme des différences de potentielles sur une maille est nulle.

$$\boxed{\sum_{maille} U_k = 0}$$



Ici : $U_1 + U_2 + U_3 + U_4 = 0$

Point important 3.1 — Résoudre un problème d'électrocinétique.
Lorsque vous **cherchez des tensions ou des courants** au sein d'un circuit, procédez comme suit :

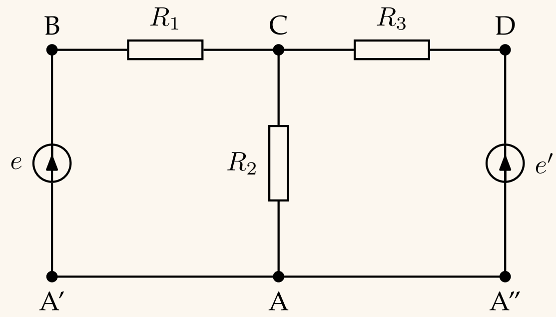
1. Dessiner le circuit le plus simplement possible. Assigner un **nom** et un **sens** arbitraire I_k ($k = 1, 2, \dots$) au **courant** circulant dans chaque branche du circuit. Le sens du courant que vous choisissez est sans importance[a].
2. Assigner un **nom** à la **tension** aux bornes de chaque dipôle. Attention, il faut prendre la tension dans le **sens opposé** au sens du courant que vous avez choisi dans la branche où se trouve le dipôle.

3. Écrire la **loi des nœuds** en chaque nœud du circuit.
4. Repérer les **différentes mailles** du circuit. **Choisir un sens de parcours** pour chaque maille (horaire ou bien trigo). Écrire la **loi des mailles** pour toutes les mailles du circuit[b].
5. Utiliser le lien (la caractéristique) de chaque dipôle pour relier U_k et I_k.
6. Avec tout ça il doit rester autant d'équations que d'inconnues. Il reste simplement un système à résoudre.

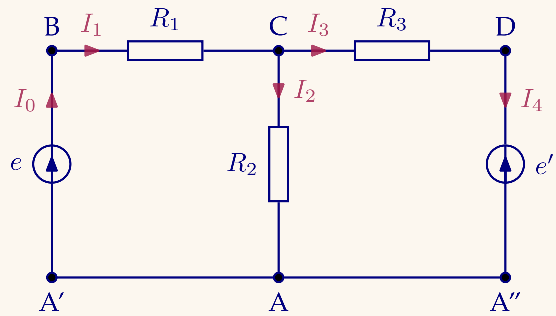
a. Si à la fin vous trouvez $I_k < 0$, cela signifie que le sens réel du courant est dans le sens opposé à la convention que vous avez choisie.

b. Si le sens de parcours est opposé à un tension U_k alors il faut écrire $-U_k$ dans la loi des mailles pour cette tension.

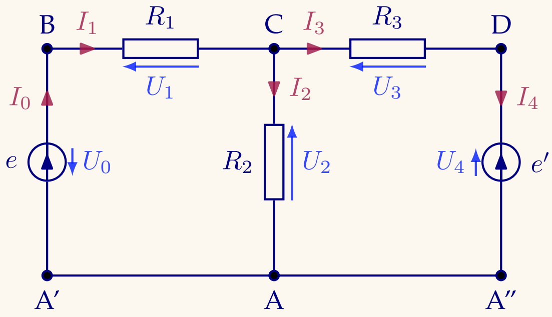
Exercice 3.1 — Courant et tension dans un circuit simple.
Dans le circuit ci-dessous, déterminer le courant qui circule dans chacune des résistances et vérifier que la puissance fournie par les deux piles est bien entièrement dissipée dans les résistances.
On a $e = 17V$, $e' = 6V$, $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 4\Omega$ et $R_3 = 3\Omega$.



- On commence par choisir un sens et un nom pour le courant dans chacune des branches (ce choix est arbitraire, vous pouvez choisir quelque chose de différent) :



- On nomme ensuite les tensions aux bornes de chaque dipôle, on les oriente en direction opposé au courant.



- On utilise les caractéristiques associées à chaque dipôle pour relier courant et tension dans chaque composant.
  - $U_0 = -e$
  - $U_1 = R_1 I_1$
  - $U_2 = R_2 I_1$
  - $U_3 = R_3 I_3$
  - $U_4 = e'$
- On utilise la loi des Nœuds en B, C, D (on peut aussi l'appliquer en A, A' et A'', mais cela n'apporte pas d'information nouvelle) :
  - $I_0 + (-I_1) = 0 \Rightarrow I_0 = I_1$
  - $I_3 = I_4$
  - et enfin :

$$\boxed{I_1 = I_2 + I_3} \ (1)$$

- On utilise la loi des mailles sur $AA'BC$ et $ACDA''$:
  - En suivant $AA'BC$:

$$U_{AA'} + U_{A'B} + U_{BC} + U_{CA} = 0$$

$$0 - U_0 - U_1 - U_2 = 0$$

$$\boxed{e - R_1 I_1 - R_2 I_2 = 0} \ (2)$$

  - En suivant $ACDA''$:

$$U_{AC} + U_{CD} + U_{DA''} + U_{A''A} = 0$$

$$U_2 - U_3 - U_4 + 0 = 0$$

$$\boxed{R_2 I_2 - R_3 I_3 + e' = 0} \ (3)$$

- Enfin (1), (2) et (3) forment un système linéaire à 3 équations et 3 inconnues, que l'on résout pour trouver :

$$I_2 = \frac{e + \frac{R_1}{R_3} e'}{R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}} = 3A$$

$$I_3 = \frac{R_2 e + \frac{R_1 R_2}{R_3} e'}{R_1 R_3 + R_2 R_3 + R_1 R_2} + \frac{e'}{R_3} = 2A$$

$$I_1 = I_2 + I_3 = 5A$$

Comme on a trouvé I_1, trouver U_1 est trivial :

$$U_1 = R_1 I_1$$

Idem pour U_2 et U_3.
La puissance qui est **dissipée** par le dipôle $A'B$ est : $P_d = U_0 \times I_0 = -e \times I_1 = -85W$, la puissance n'est donc pas dissipée mais bien générée par la source e.
La puissance qui est **dissipée** par le dipôle $A''D$ est $P'_d = U_4 \times I_4 = e' \times I_3 = 12W$, la puissance est bien absorbée par la pile e' : la pile se recharge !
La puissance totale dissipée dans les résistances est :

$$P_d = U_1 I_1 + U_2 I_2 + U_3 I_3 = 25 + 36 + 12 = 73W$$

Ce qui correspond bien à la puissance des sources : $85 - 12 = 73W$ ■