Potentiel Électrostatique

L'expression de la force électrostatique est très similaire à celle de l'attraction gravitationnelle. L'attraction gravitationnelle est associée à une énergie potentielle de pesanteur. Sans surprise, on définit de façon similaire une **énergie potentielle** électrostatique, qui, à peu de chose près correspond au **potentiel électrostatique.** Il s'agit en fait d'une énergie par unité de charge.

1 Définition

On considère une particule de charge q soumise à une force électrique $\vec{F}_e$.
La force électrique est une force **conservative** i.e. le travail qu'effectue cette force sur une particule chargée est **indépendant du chemin suivi** par la particule. Cela signifie que l'on peut y associer une **énergie potentielle**, dont la définition est donnée à partir de sa différentielle :

$$d\mathcal{E}_{\text{potentielle électrostatique}}(q) \stackrel{\text{def}}{=} -\vec{F}_e \cdot \overrightarrow{dl}$$

Soit :

$$\mathcal{E}_{\text{p.e.}}(q) \stackrel{\text{def}}{=} -\int_{\text{chemin arbitraire}} \vec{F}_e \cdot \overrightarrow{dl} + Cte$$

Notons que comme d'habitude avec l'énergie, celle-ci est **définie à une constante près**.
On l'a vu dans le chapitre précédent, la force électrostatique peut s'exprimer à partir du champ électrique :

$$\mathcal{E}_{\text{p.e.}}(q) = -\int q\vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} + Cte$$

$$\mathcal{E}_{\text{p.e.}}(q) = q\int -\vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} + Cte$$

L'idée cachée derrière le potentiel électrique est d'avoir une grandeur qui représente l'énergie potentielle liée à la présence du champ électrique, mais qui serait indépendante de la charge q.
C'est donc une grandeur fonction de l'espace créée par un système de charges sources, indépendante de la particule qui y est plongée (comme le champ électrique, mais c'est une grandeur scalaire, pas vectorielle).
On se propose de définir une nouvelle quantité V, définie par sa différentielle dV telle que :

$$\mathcal{E}_{\text{p.e.}}(q) = q\int dV + Cte$$

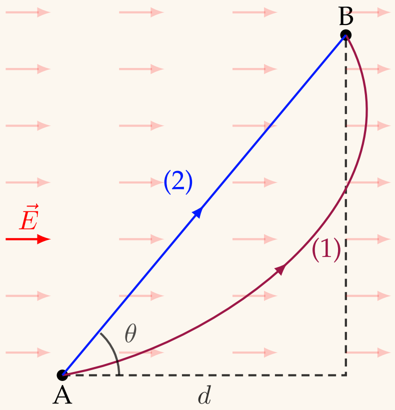
Définition 1.1 — Potentiel électrostatique.
Le potentiel électrostatique est la grandeur V telle que, pour deux points espacés de $\overrightarrow{dl}$:

$$\boxed{dV \stackrel{\text{def}}{=} -\vec{E} \cdot \overrightarrow{dl}}$$

Attention : le symbole "$\cdot$" représente le produit scalaire.
On appelle **différence de potentiel électrostatique** entre le point A et le point B la quantité :

$$\boxed{V_B - V_A \stackrel{\text{def}}{=} -\int_A^B \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl}}$$

Exercice 1.1 — Différence de potentiel dans un champ uniforme.
Que vaut la différence de potentiel entre deux points de l'espace où règne un champ uniforme ?



Le calcul de la différence de potentiel est indépendant du chemin suivi [a], donc :

$$V_B - V_A \stackrel{\text{def}}{=} -\int_{(1)} \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

$$V_B - V_A \stackrel{\text{def}}{=} -\int_{(2)} \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

Le calcul est bien plus facile si on choisit le chemin (2).

$$V_B - V_A = -\int_{(2)} E \times dl \times cos(\theta)$$

$$V_B - V_A = -E \times cos(\theta) \int_{(2)} dl$$

$$V_B - V_A = -E \times l \times cos(\theta)$$

$$V_B - V_A = -E \times d$$

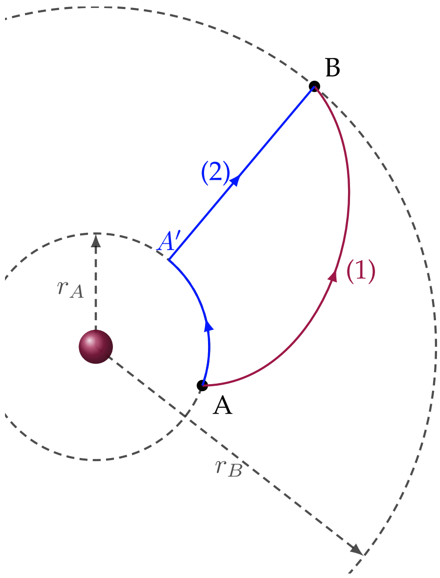
$$\boxed{\Delta V = -E \times d}$$

À titre d'exercice, vérifier que le calcul donne la même chose si on suit le chemin en pointillé.
Remarquez aussi que le résultat sera $E \times d$ si $\vec{E}$ est orienté dans le sens opposé.

a. Puisque la force électrique est conservative

2 Potentiel créé par une charge ponctuelle

On cherche à déterminer la différence de potentiel entre deux points quelconques, A et B, à proximité d'une charge ponctuelle.



Pour aller de A à B, on peut choisir n'importe quel chemin. On pourrait suivre le chemin (1), mais le calcul serait difficile. On peut aussi choisir un chemin, facile, qui suit un arc de cercle de rayon r_A jusqu'à arriver à la verticale de B , puis aller vers B en suivant un rayon (chemin (2) sur le dessin).

$$
\begin{aligned}
V_B - V_A &\stackrel{\text{def}}{=} -\int_A^B \vec{E}\cdot\vec{dl} \\
V_B - V_A &= -\left(\int_A^{A'} \vec{E}\cdot\vec{dl} + \int_{A'}^B \vec{E}\cdot\vec{dl}\right)
\end{aligned}
$$

Entre A et A', la variation de potentiel est nulle puisque les deux points sont à même distance du centre. Une façon mathématique de le voir est de constater que $\vec{E}$ est perpendiculaire à $\vec{dl}$ sur l'arc de cercle, donc $\vec{E}\cdot\vec{dl} = 0$ sur l'arc entre A et A'.

$$
\begin{aligned}
V_B - V_A &= 0 - \int_{A'}^B \vec{E}\cdot\vec{dl} \\
V_B - V_A &= -\int_{r_A}^{r_B} E(r)\vec{u}_r \cdot (dr\ \vec{u}_r) \\
V_B - V_A &= -\int_{r_A}^{r_B} k\frac{q}{r^2}dr \quad \text{(puisque } \vec{u}_r\cdot\vec{u}_r = 1\text{)} \\
V_B - V_A &= k\left[\frac{q}{r}\right]_{r_A}^{r_B} \\
V_B - V_A &= k\left(\frac{q}{r_B} - \frac{q}{r_A}\right)
\end{aligned}
$$

2.1 Convention sur la constante d'intégration

Le potentiel est défini à une constante près, toutefois, par convention, on préfère dire que $V = 0$ loin de toute charge. On se propose donc de choisir cette convention, pour une charge ponctuelle, le potentiel doit être nul loin de cette charge, c'est-à-dire $V(r \to \infty) = 0$.

Propriétés 2.1 — Potentiel créé par une charge ponctuelle (avec convention).
Avec la convention $V(r \to \infty) = 0$,

$$\boxed{V(r) = \frac{kq}{r}}$$

3 Propriétés du Potentiel

3.1 Invariance

Le potentiel vérifie les règles d'**invariance** (comme toute grandeur physique) vues au chapitre précédent.
Par exemple, si une distribution est à symétrie sphérique, alors le potentiel ne dépend que de r.

3.2 Superposition

Tout comme le champ électrique, le potentiel vérifie le principe de **superposition**.

Propriétés 3.1 — Potentiel créé par plusieurs charges.
Dans le cas d'une distribution discrète de charges

$$\boxed{V(M) = k \sum_{q_i} \frac{q_i}{r_i}}$$

avec $r_i = P_iM$ la distance entre la charge i et le point M.
Dans le cas d'une distribution de charges continue :

$$\boxed{V(M) = k \int_{\text{Source}} \frac{dQ}{r}}$$

avec $r = PM$ la distance entre le point M, point où l'on calcule le champ et le point P, point source (couvre la distribution).

Propriétés 3.2 — Potentiel créé par une distribution de charge volumique.

$$\boxed{V(M) = k \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho dV}{r}}$$

Propriétés 3.3 — Potentiel créé par une distribution de charge surfacique.

$$\boxed{V(M) = k \int_{\mathcal{S}} \frac{\sigma dS}{r}}$$

Propriétés 3.4 — Potentiel créé par une distribution de charge linéique.

$$\boxed{V(M) = k \int_{\mathcal{L}} \frac{\lambda dl}{r}}$$

3.3 Énergie potentielle

L'énergie potentielle d'une particule de charge q plongée dans un potentiel V, est tout simplement :

$$\boxed{\mathcal{E}_p = qV + cste}$$

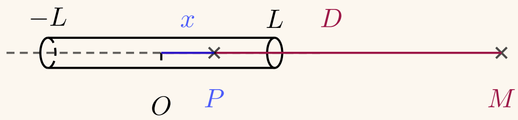
Que l'on écrira souvent :

$$\boxed{\mathcal{E}_p = qV}$$

Point important 3.1 — Détermination du potentiel.
Pour déterminer le potentiel électrostatique, on procède de la façon suivante :

1. On détermine la/les **sources** du potentiel (charges dans l'espace)
2. On détermine de quel **type de distribution** il s'agit (linéique, surfacique, volumique)
3. On choisit un **système de coordonnées** adapté.
4. On détermine la valeur de la **densité** de charge en fonction des coordonnées choisies.
5. On détermine la **distance** entre un point de la distribution et le point où l'on calcule le potentiel en fonction des coordonnées choisies.
6. On **intègre** sur la distribution.

Exercice 3.1 — bâtonnet uniformément chargé.
Déterminer le potentiel éléctrostatique créé en M par un bâtonnet uniformément chargé de densité de charge λ.



Partons du potentiel créé par une distribution continue :

$$V(M) = k\int_{\mathcal{L}} \frac{dQ}{r}$$

$$V(D) = k\int_{\text{bâton}} \frac{\lambda dl}{PM}$$

$$V(D) = k\int_{\text{bâton}} \frac{\lambda dl}{D-x}$$

$$V(D) = k\int_{-L}^{+L} \frac{\lambda dx}{D-x}$$

$$V(D) = k\lambda\int_{-L}^{+L} \frac{dx}{D-x}$$

$$V(D) = k\lambda\left[-ln(|D-x|)\right]_{-L}^{+L}$$

$$V(D) = k\lambda ln\left(\frac{|D+L|}{|D-L|}\right)$$

$$V(D) = k\lambda ln\left(\frac{1+L/D}{1-L/D}\right)$$

Et dans le cas où $D \gg L$ [a], c'est-à-dire si $\frac{L}{D} \to 0$:

$$V(D) \approx k\lambda(1 + L/D) - k\lambda(1 - L/D)$$
$$V(D) \approx \frac{k2\lambda}{D}$$
$$V(D) \approx k\frac{Q_{\text{totale}}}{D}$$

On retrouve le potentiel créé par une charge ponctuelle. ■

---

a. Si $x \to 0$, alors $ln(1 + x) \approx 1 + x$