Théorème de Gauss

PRÉREQUIS

- Chapitre sur les symétries
- Intégrales doubles
- Projections de vecteurs
- Produit scalaire euclidien

1 Description cavalière

Calculer la valeur du champ électrostatique pour une distribution de charges un peu complexe en utilisant la seule **loi de Coulomb** peut vite s'avérer **compliqué**. Nous voyons dans ce chapitre un théorème qui permet la **simplification** des calculs dans les cas où le système qui crée le champ possède des **symétries** et des **invariances** particulières.
Le **théorème de Gauss** dit alors la chose suivante :
"Le flux du champ électrostatique à travers une surface fermée est proportionnel à la charge contenue à l'intérieur de cette surface"

2 Flux électrostatique

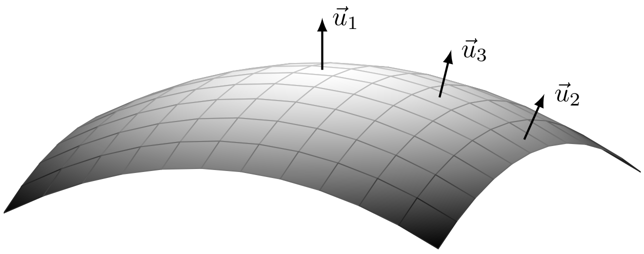
Le flux électrostatique est une construction mathématique, il est difficile de donner une explication à la fois correcte et simple de ce que c'est. De loin, c'est la multiplication d'un champ par une surface imaginaire. Pour l'instant, utilisons le simplement comme un **outil mathématique**.

2.1 Surface orientée

Un surface, c'est un ensemble de point de l'espace contraints sur **deux dimensions**.
Exemple :

- Un plan
- Un mouchoir
- Une sphère (mais pas une boule) [1]
- Un cylindre creux
- Un disque.

Pour définir une surface mathématiquement, on peut expliciter tous les points qui y appartiennent, ou bien on peut donner l'ensemble des **vecteurs normaux** à cette surface. Dans le cas où la surface est plane, un seul vecteur suffit. Le vecteur unitaire est normal au plan localement tangent à la surface.



Les vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$ sont localement normaux à la surface.

1. Une sphère est creuse, alors qu'une boule est pleine

Pour définir une même surface, il y a deux orientations possibles du vecteur normal $\vec{u}_n$, par convention, on prend celui qui va vers l'**extérieur de la surface** (si un extérieur et un intérieur peut être définit).
Si on prend un élément de surface (surface élémentaire dS) suffisamment petit, alors la surface sera localement plane[2].

Définition 2.1 — vecteur surface élémentaire.
Pour une petite surface de taille dS, de vecteur unitaire normal $\vec{u}_n$:

$$\overrightarrow{dS} \overset{\text{def}}{=} dS \times \vec{u}_n$$

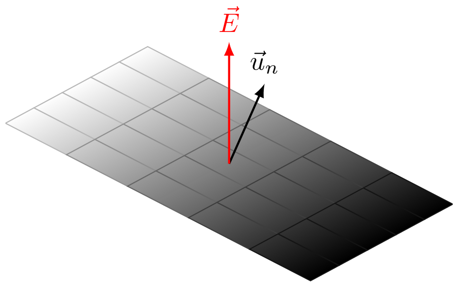
2.2 Flux

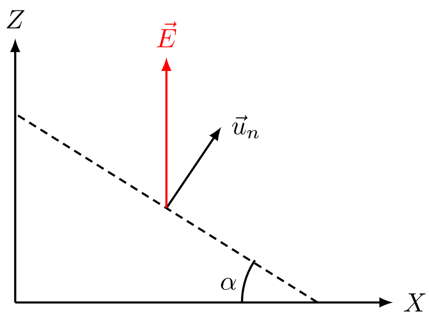
Définition 2.2 — Flux électrostatique.
On appelle flux du champ électrique à travers la surface $\mathcal{S}$ la grandeur ϕ telle que :

$$\boxed{\phi \overset{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}}$$

Où le symbole "·" représente le produit scalaire.
Comme l'intégrale porte sur une surface, il s'agira généralement d'une intégrale double.

Par exemple si on considère la surface $\mathcal{S}$, de taille S, plane, faisant un angle α avec l'horizontale, traversée par un champ électrostatique uniforme (constant dans l'espace) :





Le flux qui traverse cette surface est :

$$\phi \overset{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot \vec{dS}$$
$$\phi = \int_{\mathcal{S}} E\vec{u}_z \cdot dS\vec{u}_n$$
$$\phi = E \times \int_{\mathcal{S}} (\vec{u}_z \cdot \vec{u}_n) \times dS$$
$$\phi = E \times cos(\alpha) \times \int_{\mathcal{S}} dS$$
$$\phi = E \times cos(\alpha) \times S$$

Définition 2.3 — Surface fermée.
Une surface **fermée** est une surface qui **englobe** un volume[a]. On peut alors définir un intérieur et un extérieur à cette surface.

a. Penser à une surface qui ne laisserait pas échapper un fluide : un ballon de baudruche par exemple

Exemples :

2. On fait de la physique, les surfaces fractales ou pas dérivables, on oublie, donc on peut toujours le faire

- Une sphère
- Un cylindre avec ses couvercles supérieur et inférieur
- Un cube, etc.

R Quand on calcule un flux à travers une surface fermée, on signale que l'intégrale s'effectue sur une surface fermée par un petit cercle sur le signe intégral.

$$\int_{S \text{ fermée}} \to \oint_S$$

Ce n'est qu'une notation, et ne change rien mathématiquement au calcul de l'intégrale.

3 Théorème de Gauss

On ne démontrera pas ce théorème[3], mais sachons toutefois qu'il **dérive directement** de la loi de Coulomb. C'est à dire qu'il n'y a pas de nouvelle loi cachée derrière ce théorème, c'est un corollaire des lois de Coulomb, voilà tout.

3.1 Forme globale

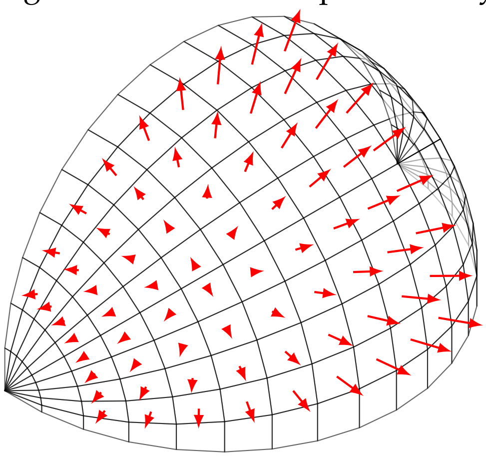
Théorème 3.1 — Théorème de Gauss.
Le flux du champ électrostatique créé par une distribution de charge, à travers une surface fermée quelconque S, est proportionnel à la charge totale intérieure Q_{int} à cette surface.

$$\phi_E = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Cela signifie donc que :

$$\boxed{\oint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}}$$

Vérifions que le théorème s'applique bien pour un cas très simple : une charge ponctuelle. On considère une charge ponctuelle de charge q située en O. On sait que le champ créé par cette charge vaut $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}_r$.
On considère une surface imaginaire en forme de sphère de rayon r_s centrée sur la charge.



Le champ électrique (en rouge) créé par une charge ponctuelle est toujours aligné avec les vecteurs normaux à chaque petite surface $\overrightarrow{dS}$ sur la sphère imaginaire (on a représenté ici qu'une partie de la sphère)

Calculons le flux du champ à travers cette sphère. On appelle P un point quelconque de la sphère imaginaire :

3. La démonstration est relativement simple, mais nécessite de connaître le concept d'angle solide

$$\phi \stackrel{\text{def}}{=} \oint_{\mathcal{S}} \vec{E}(P \in \mathcal{S}) \cdot \overrightarrow{dS}(P)$$

Au point P, $\overrightarrow{dS} = dS\vec{u}_r$ et $\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r_s^2}\vec{u}_r$

$$\begin{aligned}
\phi &\stackrel{\text{def}}{=} \oint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} \\
\phi &= \oint_{\mathcal{S}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r_s^2}\vec{u}_r \cdot dS\vec{u}_r \\
\phi &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_s^2} \oint_{\mathcal{S}} \vec{u}_r \cdot \vec{u}_r dS \\
\phi &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_s^2} \oint_{\mathcal{S}} dS \\
\phi &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_s^2} 4\pi r_s^2 \\
\phi &= \frac{q}{\epsilon_0}
\end{aligned}$$

Le théorème de Gauss est bien vérifié !

R Le théorème de Gauss est vrai pour n'importe quelle surface fermée. Dans la pratique on ne l'utilise que pour trois surfaces classiques : la sphère, le cylindre et parfois (rarement) sur un parallélépipède rectangle.

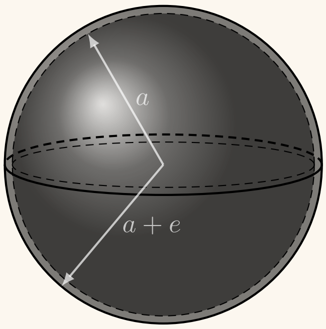
Point important 3.1 — Utilisation du théorème de Gauss.
Lorsque l'on souhaite calculer un champ électrique en utilisant le théorème de Gauss, on procède de la façon suivante :

1. On choisit un **système de coordonnées** adapté (généralement cylindriques, ou sphériques)
2. On identifie les **invariances** de la distribution de charge : on **supprime** des dépendances. Par exemple si le système est invariant par translation selon z et par rotation selon θ :
$$E(r,\theta,z) \rightarrow E(r,\cancel{\theta},\cancel{z})$$
3. On identifie les **plans de symétrie** de la distribution qui passent par le point où l'on souhaite calculer le champ. Le champ en ce point est **inclus** dans ce ou ces plans de symétrie, on réduit ainsi les possibilités pour l'orientation de $\vec{E}$. Exemple, *a priori*,
$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_r \\ E_\theta \\ E_z \end{pmatrix}$$
a trois composantes non nulles. Si $(O,\vec{u}_z,\vec{u}_r)$ est plan de symétrie, alors $E_\theta = 0$. Généralement, il y a plusieurs plan de symétries. Exemple : si $(O,\vec{u}_z,\vec{u}_r)$ et $(O,\vec{u}_r,\vec{u}_\theta)$ sont plans de symétrie alors $E_\theta = 0$ et $E_z = 0$, donc
$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_r \\ \cancel{E_\theta = 0} \\ \cancel{E_z = 0} \end{pmatrix}$$

4. On choisit une **surface arbitraire** imaginaire fermée (généralement une surface qui a la **même forme** que la distribution de charge mais pas de la même taille).
5. On détermine le flux de $\vec{E}$ à travers surface imaginaire.
6. On détermine la **charge contenue** à l'intérieur de la surface imaginaire.
7. Enfin, et enfin seulement, on applique le **théorème de Gauss** dans le but de déduire l'expression complète de $\vec{E}$.

Exercice 3.1 — Champ créé par une sphère creuse uniformément chargée en surface.

On considère une coquille sphérique, d'épaisseur e négligeable, chargée uniformément en surface (σ).



Déterminer le champ en n'importe quel point de l'espace.

On va appliquer la méthode vue dans le point essentiel.

1. On se place en coordonnées sphérique puisque la distribution qui génère le champ est sphérique.
$$\vec{E} = \vec{E}(r, \theta, \phi)$$
2. La distribution qui crée le champ est invariante par rotation sur l'angle ϕ et sur l'angle θ.
$$\vec{E}(r, \cancel{\theta}, \cancel{\phi}) = \vec{E}(r)$$
3. Tous les plans qui passent par O et par M, point où l'on va calculer le champ, sont plans de symétrie de la sphère, en particulier $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\phi)$ et $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$. Donc
$$\vec{E}(r) = E(r)\vec{u}_r$$
Comme le champ ne dépend que de r et qu'il est dirigé selon un rayon, on dit que le champ est **radial**.
4. On choisit une surface imaginaire sphérique de rayon r puisque la distribution de charge qui crée le champ est une sphère. (Attention, r peut *a priori* être plus ou moins grand que a)
5. On détermine le flux :
$$\Phi(\vec{E}) \stackrel{\text{def}}{=} \oint \vec{E} \cdot d\vec{S}$$
avec $d\vec{S} = dS\, \vec{u}_r$ et $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$
$$\Phi(\vec{E}) = \int E(r)\vec{u}_r \cdot (dS\, \vec{u}_r)$$

Comme $\vec{u}_r \cdot \vec{u}_r = 1$ et puisque $E(r)$ est constant sur une surface de rayon r constant,

$$\Phi(\vec{E}) = E(r) \int dS$$

$$\Phi(\vec{E}) = E(r) \times 4\pi r^2$$

6. La charge contenue dans une sphère de rayon r vaut :
   - 0 si $r < a$
   - $\sigma \times 4\pi a^2$ si $r > a$
7. On applique le théorème :
   - si $r < a$:

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{E}) &= 0 \qquad \text{théorème de Gauss} \\ 4\pi r^2 E(r) &= 0 \\ E(r < a) &= 0 \end{aligned}$$

   - si $r > a$

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{E}) &= \frac{4\pi a^2 \sigma}{\epsilon_0} \qquad \text{théorème de Gauss} \\ 4\pi r^2 E(r) &= \frac{4\pi a^2 \sigma}{\epsilon_0} \\ E(r > a) &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{a^2}{r^2} \end{aligned}$$

On en conclue donc que le champ est nul à l'intérieur de la sphère, et à l'extérieur,

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{a^2}{r^2} \vec{u}_r}$$

■