Champ électrostatique (deuxième partie)

PRÉREQUIS

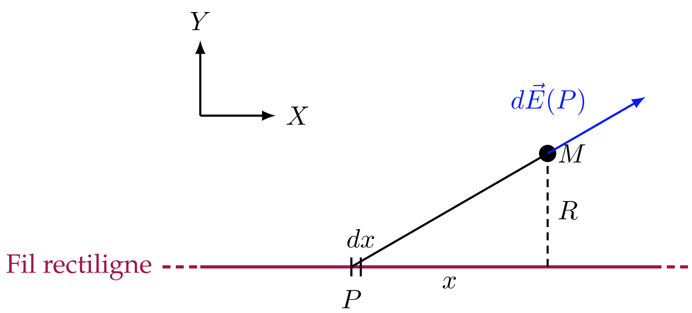
- Physique :
  - ✓ Charge électrique
  - ✓ Force de Coulomb
  - ✓ Champ électrique
- Mathématique :
  - ✓ Projections de vecteurs
  - ✓ Intégrales multiples

1 Champ créé par des géométries particulières

Dans cette section, on s'intéresse au champ créé par des distributions de charges particulières, qui ont pour intérêt de modéliser des éléments couramment rencontrés en électricité (fil rectiligne, disque, cylindre, etc).

1.1 Fil infini

On considère un fil chargé **uniformément** (de charge linéique λ) et **rectiligne**. On cherche la valeur du champ électrique à proximité de ce fil. On se place tellement proche du fil que les bords du fil peuvent être considérés comme se trouvant à l'**infini**.
On cherche donc l'orientation, le sens et la norme de $\vec{E}$ en tout point M situé à une distance R du fil.



Le champ créé en M est la somme des champs créés par chacun des morceaux situés en P d'épaisseur $dl = dx$ et considérés comme ponctuels.

$$\vec{E}_{tot}(M) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{fil} d\vec{E}$$
$$\vec{E}_{tot}(M) = k \times \int_{fil} \frac{\lambda dx}{PM^2} \vec{u}_{PM}$$

Par projection sur $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$, on a :

$$\overrightarrow{PM} = \begin{pmatrix} x \\ R \end{pmatrix}$$

Par conséquent :

$$PM \stackrel{\text{def}}{=} \|\overrightarrow{PM}\|$$
$$PM = \sqrt{x^2 + R^2}$$

et

$$\vec{u}_{PM} \overset{\text{def}}{=} \frac{\overrightarrow{PM}}{PM}$$
$$\vec{u}_{PM} = \frac{1}{\sqrt{x^2+R^2}} \begin{pmatrix} x \\ R \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\vec{E}_{tot}(M) = k \times \int_{fil} \frac{\lambda dx}{(x^2+R^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ R \end{pmatrix} \tag{1}$$

R Petit point mathématique. On remarquera que, puisque $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$ sont constants lorsque P varie, ils peuvent être sortis de l'intégrale :

$$\int \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} dx = \int (a\vec{u}_x + b\vec{u}_y) dx$$
$$\int \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} dx = \int a\vec{u}_x dx + \int b\vec{u}_y dx$$
$$\int \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} dx = \left(\int a dx\right) \vec{u}_x + \left(\int b dx\right) \vec{u}_y$$

c'est-à-dire :

$$\int \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} dx = \begin{pmatrix} \int a dx \\ \int b dx \end{pmatrix}$$

On peut maintenant repartir de l'équation (1) :

$$\vec{E}_{tot}(M) = k\lambda \times \begin{pmatrix} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{(x^2+R^2)^{3/2}} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R dx}{(x^2+R^2)^{3/2}} \end{pmatrix}$$

Ne soyez pas effrayés ! Même si cette expression est d'apparence compliquée, nous savons la résoudre. Prenons notre temps :
La composante sur x vaut 0 car il s'agit de l'intégrale d'une fonction **impaire** sur un domaine symétrique. Une autre façon de s'en rendre compte est plus physique : si on considère deux points P et P' symétriques par rapport à O, on se rend compte qu'ils produiront deux champs dont les composantes horizontales s'opposent. Cela permet de conclure directement que la composante horizontale du champ sur l'axe est nulle.
Il reste à calculer la composante sur y :

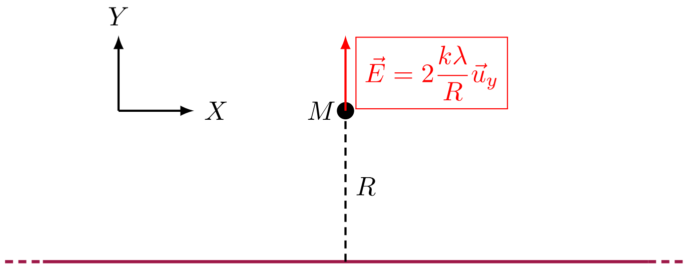
$$E_y = k\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R dx}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$
$$E_y = k\lambda \left[\frac{x}{R(x^2+R^2)^{1/2}} \right]_{-\infty}^{+\infty}$$
$$E_y = \frac{k\lambda}{R} \left[\frac{x}{(x^2+R^2)^{1/2}} \right]_{-\infty}^{+\infty}$$
$$E_y = \frac{k\lambda}{R}(1-(-1))$$
$$E_y = 2\frac{k\lambda}{R}$$

Ici, l'homogénéité de $k\frac{\lambda}{R}$ est bien la même que $k\frac{q}{r^2}$ puisque λ est homogène à une charge divisée par une distance.

R Pour vérifier ces calculs d'intégrales difficiles, n'hésitez pas à tricher en vous rendant sur `http://www.wolframalpha.com/` et en tapant par exemple dans le moteur de recherche :

```
int  (R*dx)/((x^2+R^2))^(3/2)
```

Finalement, après ces grandioses péripéties il reste que le champ fuit (si λ est positif) le fil, et il dépend uniquement de la distante R au fil. De façon générale, le champ électrique est toujours dirigé depuis les charges positives vers les charges négatives



Point important 1.1 — Champ créé par un fil rectiligne infini uniformément chargé.
En coordonnées cylindriques, centrées sur le fil, l'expression du champ devient :

$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{2k\lambda}{r}\vec{u}_r}$$

1.2 Plan infini

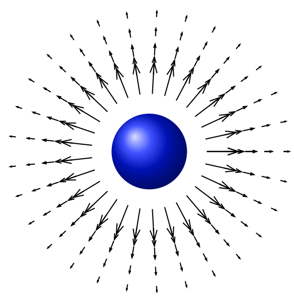
Nous ne feront pas de preuve complète , mais nous accepterons que le champ crée par une surface uniformément chargé est perpendiculaire à la surface.

Point important 1.2 — Plan infini, uniformément chargé.
Un plan (Oxy) uniformément chargé avec une densité surfacique σ crée le champ suivant :

$$\boxed{\vec{E} = \pm\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{u}_z}$$

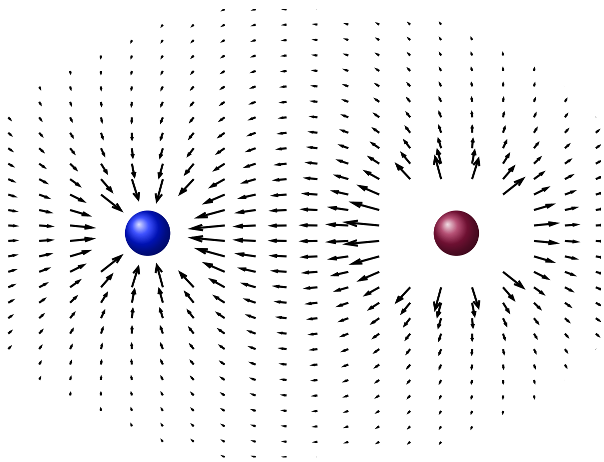
2 Lignes de champ

On peut **représenter** le champ électrique dans l'espace simplement en traçant une flèche dont la longueur et la direction correspondent à la norme et à la direction du champ électrique en ce point.

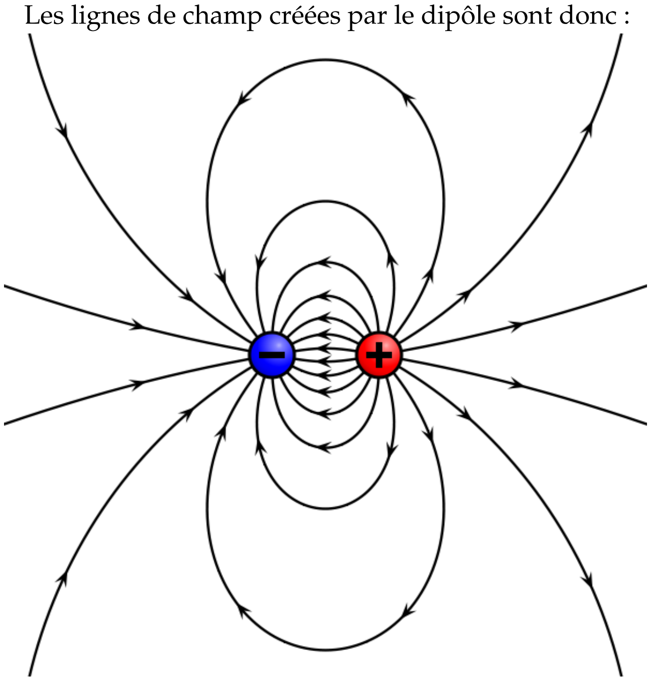


Définition 2.1 — Lignes de champ.
Les **lignes de champ** sont les courbes orientées telles que leur tangente, en chaque point, ait même direction et même sens que le champ électrostatique.

Lorsque le champ est créé par plusieurs charges, les choses deviennent vite plus compliquées, ci-dessous les lignes de champ créées par un **dipôle**. Un dipôle est définit par deux charges égales et de signe opposés séparées par une distance a.



Les lignes de champ créées par le dipôle sont donc :



On voit bien que les lignes de champ partent des charges positives et convergent vers les charges négatives.